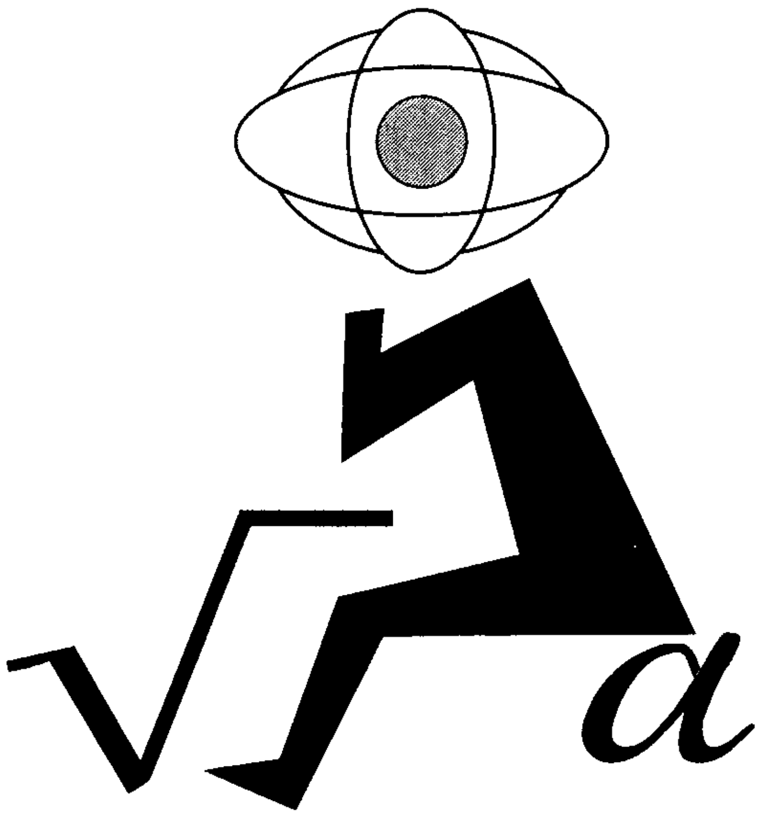
Ш.А.Аюпов, Б.Б.Рихсиев, О.Ш.Қўчқоров

МАТЕМАТИКА ОЛИМПИАДАЛАРИ МАСАЛАЛАРИ

II қисм

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004},$$

$$x, y, z, t \in Z$$



«ФАН»

Ш.А.Аюпов, Б.Б.Рихсиев, О.Ш.Қўчқоров

Математика олимпиадалари масалалари

II қисм

Тошкент
Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
"Фан"нашриёти
2004

Қўлланма турли даражадаги мураккабликда бўлган 100 та математика олимпиадалари масалаларини ечимлари билан биргаликда ўз ичига олган.

Умумий ўрта таълим мактабларининг юқори синф ўқувчилари, академик лицейлар ва педагогика институтларининг математика факультети талабалари, математика ўқитувчилари ҳамда математикага қизиқувчи барча касб эгалари учун мўлжалланган.

Масъул муҳаррир:
ф.-м. фанлари доктори, профессор **А.Аъзамов**

Тақризчи:
ф.-м. фанлари номзоди, доцент **М.Мирзаахмедов**

ISBN 5-648-03119-X

Кириш

Бу китобча ушбу номдаги ўқув қўлланмалари туркумининг иккинчи қисми бўлиб, у ўқувчиларни вилоят, Республика ва халқаро математика олимпиадаларига тайёрлаш учун мўлжалланган.

Бу қисм ҳам элементар математиканинг барча соҳаларидан юзта масалани ўз ичига олади: уларнинг ярмидан ортиғи туман ва вилоят математика олимпиадалари даражасида, қолганлари эса Республика, чет мамлакатлар ва халқаро математик олимпиадалар даражасидаги масалалардир. Республикамиздаги академик лицей ва математикага ихтисослашган кўплаб махсус мактабларнинг иқтидорли ёш математиклари ва уларнинг устозларини ҳисобга олиб иккинчи қисмга биринчи қисмга қараганда қийинлик даражаси юқори бўлган масалалар кўпроқ киритилди. Масалаларнинг деярли барчаси учун жавоблар ва ечиш йўллари кўрсатилган. Масалани тўла ечиш учун ўқувчи қисман мушоҳадаларни ўзи мустақил амалга ошириши лозим.

Тақдим этилаётган китобчалар туркуми математика бўйича тўгараклар ва синфдан ташқари машғулотлар учун муҳим қўлланма бўлиб хизмат қилади, деб умид билдирамиз. Қўлланма, айниқса иқтидорли ёш физик ва математикларга мустақил шуғулланишлари учун қўл келади. Ўқув қўлланмалари туркумидаги масалаларнинг камида 90-95 фоизини мустақил еча олиш даражасига эришган ўқувчилар Республика ва халқаро олимпиадаларида муваффақиятли қатнаша олади. Шунингдек, улар олимпиада натижаларидан қатъий назар етук математик, физик, инженер бўлиб етишиши учун мустаҳкам асосга эга бўладилар.

Қўлланмалар ҳақида ўз фикр-мулоҳазаларини билдирган ҳар бир китобхондан чуқур миннатдор бўламиз.

Муаллифлар

Шартли белгилар

N - натурал сонлар тўплами; **Z** - бутун сонлар тўплами; **Q** - рационал сонлар тўплами; $[x]$ - x сонининг бутун қисми, x дан ошмайдиган энг катта бутун сон; $\{x\} = x - [x]$; $a \perp b$ - a ва b тўғри чизиқлар перпендикуляр; $a \parallel b$ - a ва b тўғри чизиқлар параллел; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; $a \vdots b$ - a сони b сонига каррали; $a \equiv b (\mathrm{mod} m)$ - $(a - b)$ айирма m сонига бўлинади.

Масалалар

1. Бир оролда фақат рост гапирадиган ва фақат ёлғон гапирадиган, жаъми n та одам яшайди. Улардан ҳар бири биттадан тасдиқ айтган. Бунда k рақамли одам $(1 \leq k \leq n)$ шундай деган: "Мени ҳисобга олмаганда, оролда рост гапирадиганлар сонидан ёлғон гапирадиганлар сони k та кам". Оролда нечта одам яшайди?

2. Каримда 5 см ва 6 см узунликдаги таёқлар бор. Ундаги барча таёқлар узунликларининг йиғиндиси 6 метрга тенг бўлса, бу таёқлардан периметри 6 метрга тенг бўлган мунтазам ўнбурчак ясаш мумкинлигини исботланг.

3. Учта кетма-кет икки хонали сонларни ёнма-ён ёзиб, олти хонали сон ҳосил қилинди. Ҳосил бўлган олти хонали сон 17 га бўлинса, қандай олти хонали сонлар ҳосил бўлиши мумкин?

4. Айлана бўйлаб 2000 та нуқтага 1 рақами жойлаштирилган. Фарҳод бир соат мобайнида бу 2000 та рақам устида қуйидаги амалларни бажаради: ҳар бир минутда қандайдир кетма-кет жойлашган ўн иккита сонни танлайди ва уларнинг ишораларини ўзгартириб, ҳосил бўлган сонларни шу ўринларга тескари тартибда ёзади. Бир соат вақт тугагандан сўнг Салим айланада ҳосил бўлган сонлардан бирини танлайди ва шун сондан бошлаб биттадан оралатиб 1000 тасининг ишорасини ўзгартириб чиқади. Натижада айланада нечта 1 рақами қолиши мумкин?

5. 1, 2, 3, ..., 2004 сонларни рангли сиёҳларда ёзиш лозим. Бунда агар a сони b сонига бўлиниб, b сони c сонига бўлинса, у ҳолда бу уч сон бир хил рангда ёзилиши мумкин эмас. Шу тартибда ёзиш учун камида неча хил ранг керак бўлади?

6. Волейбол бўйича Евро-Африка чемпионатида иштирок этган Европа жамоалари сони Африка жамоалари сонидан 9 та ортиқ. Чемпионатда исталган иккита жамоа ўзаро бир мартадан ўйин ўтказди. Натижада Европа жамоалари биргаликда Африка жамоалари биргаликда тўплаган очкодан 9 марта кўп очко тўплади (бунда ғолиб жамоага 1 очко, мағлуб жамоага 0 очко берилди). Африкалик битта жамоа кўпи билан нечта очко тўплаган бўлиши мумкин?

7. Йиғиндиси 407 га тенг бўлган учта натурал сон кўпайтмаси кўпи билан нечта ноль билан тугаши мумкин?

8. Агар a ва b сонлари $(a+b+2006)^2 = 4(a+2005)(b+1)$ тенгликни қаноатлантирса, $a-b$ айирмани топинг.

9. Текисликда 30 та кесма ясалган. Улардан исталган иккитаси умумий нуқтага эга эмас ва бир тўғри чизиқда ётмайди. Ҳар бир кесма учун қуйидаги тасдиқни айтиш мумкинми: бу кесма орқали ўтувчи тўғ ри чизиқ роппа-роса 15 та кесмани (ички нуқтасида) кесиб ўтади?

10. Кесишувчи иккита йўлдан биринчисида "Тико", иккинчисида "Матиз" автомашинаси бир хил тезлик билан ҳаракатланди. Соат 17.00 ва 18.00 да "Матиз"автомашинаси "Тико"автомашинасига қараганда чорраҳадан икки марта узоқ масофада жойлашгани қайд этилди. "Тико"автомашинаси чорраҳадан соат нечада ўтган?

11. Қуйидаги хоссаларга эга бўлган тошлар тўплами берилган:

(1) исталган иккитасининг оғирлиги ҳар хил бўлган 5 та тош бор;

(2) исталган иккита тош учун оғирликлари йиғиндиси бир хил бўлган бошқа иккита тош топилади.

Бу тўпламда камида қанча тош бор?

12. Берилган учта натурал сондан исталган иккитасининг кўпайтмаси шу икки сон йиғиндисига бўлинади. Бу учта сон бирдан катта умумий бўлувчига эга эканлигини исботланг.

13. Беш хонали k та сондан ташкил топган $\{N_1, N_2, ..., N_k\}$ тўплам берилган. Барча рақамлари ўсиш тартибида ёзилган исталган беш хонали соннинг камида битта рақами N_1, N_2, ...,N_k сонлардан бирортасининг шу ўриндаги рақами билан бир хил бўлса, у ҳолда k нинг энг кичик қийматини топинг.

14. Координаталар текислигида координаталари бутун сонлардан иборат бўлган нуқталарга натурал сонлар ёзилган. Ушбу тасдиқ ўринли бўлиши мумкинми: координаталари бутун сон бўлган учта нуқта фақат ва фақат уларга ёзилган сонлар бирдан катта умумий бўлувчига эга бўлган ҳолда бир тўғри чизиқда ётади?

15. 10×19 ўлчамли жадвалнинг ҳар бир катагига 0 ёки 1 рақами ёзилди. Сўнгра ҳар бир сатр ва устундаги сонлар йиғиндилари ҳисобланди. Бунда, кўпи билан нечта ҳар хил сон (йиғинди) ҳосил бўлиши мумкин?

16. 10×10 ўлчамли жадвалнинг диагоналларидан бирида 10 та шашка турибди (ҳар бир катакда биттадан). Битта юришда ихтиёрий иккита шашкани бир катакдан пастга тушириш мумкин. Бир қанча юришлардан кейин барча шашкалар бир қаторда туриб қолиши мумкинми?

17. Тумандаги мактабларнинг 11-синфини битирувчи йигитлар сони қизлар сонига тенг. Ҳар бир мактабдаги 11-синфни битирувчи ўқувчилар сони тумандаги битирувчи ўқувчилар сонининг ярмидан кўп эмас. Туман маданият саройида битирувчиларга бағишланган кечада барча битирувчилар иштирок этди ва ҳар бир йигит бир қизни рақсга таклиф этиб, ҳаммалари бир вақтда рақсга тушдилар. Бунда, ҳар бир йигит бошқа мактабдан келган ўқувчи қиз билан рақсга тушиши мумкинлигини исботланг.

18. 15×15 ўлчамли жадвалнинг катаклари кўк, сариқ ва қизил рангларга бўялган. Бир хил рангга бўялган катаклари сони тенг бўладиган иккита сатр топилишини исботланг.

19. Йигирма бешта натурал сон кўпайтмаси 25 сони билан тугайди. Шу 25 та сон орасида кўпайтмаси 25 сони билан тугайдиган 3 та сон топилишини исботланг.

20 Агар $\overline{a0a0...a0b0c0c0...c0c}$ сонида a ва c рақамлари 1001 мартадан, b рақами эса бир марта иштирок этган бўлиб, бу сон 37 га бўлинади. У ҳолда $b = a + c$ эканлигини исботланг.

21 Юзта спортчи бир қаторга сафланишди. Уларнинг ҳар бири қизил ёки кўк спорт кийими кийган. Бунда, агар спортчи қизил кийим кийган бўлса, сафда ундан ўнг томондаги ва чап томондаги ўнинчи ўринда турган спортчилар (агар бор бўлса) кўк кийим кийган. Бу сафдаги қизил кийим кийган спортчилар сони 50 дан ошмаслигини исботланг.

22. Қаторга 40 та икки хонали сон ёзилган. Жуфт ўринда турган сонлар йиғиндиси тоқ ўринда турган сонлар йиғиндисидан 72 га ортиқ. Бу қаторда ўзига қўшни бўлган иккита соннинг ҳар биридан кичик бўлган сон топилишини исботланг.

23. Агар ўнли саноқ системасида ёзилган бутун сонни чапдан ўнгга қараб ўқиганда ҳам, ўнгдан чапга қараб ўқиганда ҳам бир хил бўлса, бундай сонни симметрик сон деймиз. Беш хонали симметрик сонлардан нечтаси 37 га бўлинади?

24. Учта ҳаддан иборат ва ҳадлари $\{1, 2, 3, ..., 2005\}$ тўпламга тегишли бўлган барча арифметик прогрессиялар сонини топинг.

25. Тўртинчи даражасининг бўлувчилари сонига тенг бўлган барча натурал сонларни топинг.

26. Агар p туб сон учун $p^2 + 2543$ сонининг турли натурал бўлувчилари сони 16 тадан кичик бўлса, p ни топинг.

27. Ушбу $\dfrac{n}{1!} + \dfrac{n}{2!} + ... + \dfrac{n}{n!}$ йиғинди n нинг қандай натурал қийматларида бутун сон бўлади?

28. Ушбу $1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + 2004^{p-1}$ йиғинди p нинг қандай туб қийматларида p га бўлинади?

29. Агар $m \geq 3$ тоқ сони b сонининг бўлувчиси бўлса, у ҳолда b билан ўзаро туб ва $(b + 1)^m - 1$ соннинг бўлувчиси бўлган туб сон мавжуд эканлигини исботланг.

30. Натурал n сони берилган ва $(n^2,\ n^2 + n)$ интервалда a ва b натурал сонлари танланган. Бу оралиқда ab кўпайтманинг a ва b дан фарқли натурал бўлувчиси мавжуд эмаслигини исботланг.

31. Агар натурал $a_1, a_2, ..., a_n$ сонлар йиғиндиси 2004^{2004} га тенг. $a_1^7 + a_2^7 + ... + a_n^7$ йиғиндини 7 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

32. n нинг қандай бутун қийматларида $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ рационал сон бўлади?

33. Агар $[x]\cdot\{x\} = 100$ бўлса, $[x^2]-[x]^2$ ифоданинг қийматини топинг.

34. Ушбу $y^2 - [x]^2 = 19,99$ ва $x^2 + [y^2] = 1999$ тенгликларни қаноатлантирадиган x ва y ҳақиқий сонларнинг барча $(x; y)$ жуфтликларини топинг.

35. Ушбу $\left[\dfrac{x^2-3x+3}{2}\right] + 1 = x$ тенгламани ечинг.

36. Натурал n сони учун $[\lg(2004^n - 3)] = [\lg(2004^n + 3)]$ тенгликни исботланг.

37. n $(n \geq 3)$ нинг қандай бутун қийматларида $a_1!a_2!...a_{n-1}! = a_n!$ тенгликни қаноатлантирувчи турли $a_1, a_2, ..., a_n$ натурал сонлар топилади?

38. Агар натурал a, b, c, d сонлар учун $a > b > c > d$, $a + b + c + d = 2004$ ва $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2004$ бўлса, у ҳолда a нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари сонини топинг.

39. n нинг қандай наутрал қийматларида

$$a + b = n^2 \text{ ва } a^2 + b^2 = n^3$$

тенгликларни қаноатлантирувчи a ва b бутун сонлар мавжуд бўлади?

40. Ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2^{2004}$$

тенгламанинг $0 \leq x \leq y \leq z \leq t$ шартни қаноатлантирувчи бутун ечимларини топинг.

41. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} y^2 = (x+8)(x^2+2), \\ y^2 - (8+4x)y + (16+16x-5x^2) = 0. \end{cases}$$

42. Агар мусбат a, b ва c сонлари $a + b + c \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ тенгсизликни қаноатлантирса, $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$ тенгсизликни исботланг.

43. Қуйидаги тенгсизликни ечинг:

$$\frac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}.$$

44. Агар $x > 0,\ y > 0$ ва $x + y \leq 1$ бўлса, $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) \geq \frac{9}{(x+y)^4}$ тенгсизликни исботланг.

45. Мусбат a, b, c ва d сонларнинг йиғиндиси бирга тенг бўлса,

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

46. Ушбу $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right\}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча (x, y, z) сонлар учликларини топинг.

47. Ушбу

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leq \frac{1}{2}n(n+p),\ n \in \mathbf{N},$$

тенгсизлик ўринли бўладиган p нинг энг кичик қийматини топинг.

48. Агар $a, b, c \in [0; 1]$ бўлса, у ҳолда

$$a^{17} - a^{10}b^7 + b^{17} - b^{10}c^7 + c^{17} - c^{10}a^7 \leq 1$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

49. Агар мусбат a, b, c ва x, y, z сонлар $a + x = b + y = c + z = 1$ тенгликларни қаноатлантирса,

$$(abc + xyz)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx}\right) \geq 3$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

50. Ушбу $\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{5 + \ddots + \dfrac{1}{99}}}}}$ ва $\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4 + \ddots + \dfrac{1}{99 + \frac{1}{100}}}}}$

сонларнинг фарқи $\frac{1}{99! \cdot 100!}$ дан кичик эканлигини исботланг.

51. Қуйидаги сонларни таққосланг:

$$\lg^2(5 + \sqrt{35}) \text{ ва } \lg(6 + \sqrt{35}).$$

52. Агар x, y ва z мусбат сон бўлса,

$$\sqrt{x^2 + y^2 - xy} + \sqrt{x^2 + z^2} \geq \sqrt{y^2 + z^2 + yz\sqrt{3}}$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

53. Исталган натурал n сони учун

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + ... + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}$$

тенгсизликни исботланг.

54. Агар a, b, c ҳақиқий сонлар $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда $|a| + b| + |c| - abc \leq 4$ бўлишини исботланг.

55 Агар a, b, c мусбат сонлар бўлса, у ҳолда $a; b; c; \frac{a^2}{b}; \frac{b^2}{c}; \frac{c^2}{a}$ сонлари орасида роппа-роса учта ҳар хил сон бўлиши мумкинми?

56. Исталган иккитаси айирмасининг модули иккидан кичик бўлган x, y, z сонлари учун

$$\sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} > x + y + z$$

тенгсизликни исботланг.

57. Агар a, b, c сонлари бирор учбурчак томонларининг узунликлари бўлса, у ҳолда

$$a + b + c < 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}$$

тенгсизликни исботланг.

58. Ушбу $a_n = [(n + \sqrt{19})^2 + 2n + \sqrt{99}]$, $n \geq 0$, кетма-кетликнинг ҳеч бир ҳади тўла квадрат бўла олмаслигини исботланг.

59. Натурал сонларнинг бирор $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ тўплами учун ушбу шартларни қаноатлантиради:

(1) a_i сонларнинг ҳеч бири туб эмас;

(2) a_i сонлардан исталган иккитаси ўзаро туб;

(3) $1 < a_i \leq (3n + 1)^2$, $i = 1, 2, ..., n$.

Бу шартлар ўринли бўладиган n нинг энг катта қийматини топинг.

60. a_n кетма-кетлик қуйидагича аниқланган:
a_0 - натурал сон ва

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n - 1}{2}, & \text{агар } a_n \geq 1 \text{ бўлса;} \\ \dfrac{2a_n}{1 - a_n}, & \text{агар } a_n < 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

Барча $n = 1, 2, ..., 2001$ учун $a_n \neq 2$ ва $a_{2002} = 2$ бўлса, у ҳолда a_0 ни топинг.

61. Агар $a_1 > 0$ ва $a_{n+1} = a_n + \dfrac{n}{a_n}, n \geq 1$, бўлса, у ҳолда

а) $a_n \geq n,\ n = 2, 3, ...$ тенгсизликни исботланг;

б) $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$ кетма-кетликни лимитга эга бўлишини кўрсатинг.

62. Координаталар текислигида $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(3;0)$, $D(4;0)$, $E(-2;5)$, $F(-1;5)$, $G(8;5)$ ва $H(9;5)$ нуқталар белгиланган. Бирор квадрат учҳаднинг графиги AB, CD, EF ва GH кесмаларнинг ҳаммасини кесиши мумкинми?

63. Мусбат коэффициентли $P(x) = ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад учун $P(x) \cdot P\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2$ тенгсизлик x нинг барча мусбат қийматларида ўринли эканлигини кўрсатинг.

64. Агар $f(x) = x^2 + bx + c$ квадрат учҳаднинг битта илдизи $(0;1)$ оралиққа тегишли бўлиб, иккинчи илдизи тегишли бўлмаса, у ҳолда $f(c) \leq 0$ эканлигини исботланг.

65. Бош коэффициентлари ҳар хил бўлган учта квадрат учҳад берилган. Улардан исталган иккитасининг графиклари роппа-роса битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда учта график битта умумий нуқтага эга эканлигини исботланг.

66. Мусбат a, b ва c сонлар берилган. Али

$$x^2 = ax + b,\ x^2 = bx + c \text{ ва } x^2 = cx + a$$

тенгламаларнинг, Вали эса

$$x^2 = ax + a,\ x^2 = bx + b \text{ ва } x^2 = cx + c$$

тенгламаларнинг мусбат илдизлари йиғиндисини ҳисобладилар. Агар бу йиғиндилар тенг бўлмаса, қайси боланинг йиғиндиси катта?

67. Рационал сонлар тўпламида аниқланган $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ функция барча $x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}$ учун

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2547$$

тенгликни қаноатлантиради. Агар $f(2004) = 2547$ бўлса, $f(2547)$ ни топинг.

68. Исталган мусбат x ва y сонлар учун

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x) \cdot y)$$

тенгликни қаноатлантирадиган барча $f : (0;\infty) \to (0;\infty)$ функцияларни топинг.

69. Қуйидаги иккита шартни қаноатлантирувчи $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ функция берилган:

(1) агар a ва b сонлари ўзаро туб сонлар бўлса, $f(ab) = f(a)f(b)$;

(2) барча p ва q туб сонлари учун $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Исботланг: $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ ва $f(2005) = 2005$.

70. Исталган $x, y \in \mathbf{Q}$ учун $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ ва $f(1) = 2$ тенгликларни қаноатлантирадиган барча $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ функцияларни топинг.

71. Мусбат сонлар тўпламида аниқланган ва исталган мусбат x ва y сонлар учун

$$f(x) \cdot f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

тенгликни қаноатлантирадиган барча f функцияларни топинг.

72. Исталган $x \geq 0$ ва $y \geq 0$ сонлари учун

$$xf(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y)\left(f(x) + f(y)\right)$$

тенгликни қаноатлантирувчи барча $f : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ функцияларни топинг.

73. Берилган $A_1A_2A_3A_4$ тўртбурчак ω_1 айланага ташқи ва ω_2 айланага ички чизилган. Агар унинг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 томонлари w_1 айланага мос равишда B_1, B_2, B_3, B_4 нуқталарда уринган бўлса, у ҳолда

$$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2 + \left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2 + \left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2 + \left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2 \geq 8$$

тенгсизликни исботланг.

74. Қавариқ $ABCDEF$ олтибурчакда $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ ва $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 360^0$ бўлса, у ҳолда A, C ва E нуқталардан мос равишда FB, BD ва DF тўғри чизиқларга туширилган перпендикулярларнинг бир нуқтада кесишишини исботланг.

75. Агар ABC учбурчакда $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ бўлса, у ҳолда ABC учбурчакнинг AD баландлиги, BE биссектрисаси ва CF медианаси

$$a^2(a-c) = (b^2 - c^2)(a+c)$$

тенглик бажарилганда ва фақат шу ҳолда бир нуқтада кесишишини исботланг.

76. Агар a, b, c - учбурчак томонлари бўлса, у ҳолда

$$(-a+b+c)(a-b+c)+(a-b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(-a+b+c) \leq$$

$$\leq \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

тенгсизликни исботланг.

77. ABC учбурчакда $\angle A = 70^0$ ва бу учбурчакка ички чизилган айлана маркази O нуқта бўлсин. Агар $AC + AO = BC$ бўлса, учбурчакнинг B бурчагини топинг.

78. Қавариқ $ABCD$ тўртбурчак юзи $\frac{1}{4}(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2)$ дан ошмаслигини исботланг.

79. Айланага ички чизилган $ABCD$ тўртбурчакда $\angle ABC = 60^0$.

1) Агар $BC = CD$ бўлса, $CD + AD = AB$ эканлигини исботланг.

2) Агар $CD + AD = AB$ бўлса, $BC = CD$ бўлиши мумкинми?

80. ABC учбурчакнинг AC томонида K нуқта танланган. Агар $AK = 2KC$, $\angle ABK = 2\angle KBC$, AC томоннинг ўртаси F ва A нуқтанинг BK кесмадаги проекцияси L нуқта бўлса, у ҳолда FL ва BC тўғри чизиқлар перпендикуляр эканлигини исботланг.

81. Қавариқ $ABCD$ тўртбурчакда $\angle ABC = 90^0$, $AC = CD$, $\angle BCA = \angle ACD$, F нуқта AD кесманинг ўртаси, BF ва AC кесмалар L нуқтада кесишади. Исботланг $BC = CL$.

82. $ABCD$ трапеция AB ён томонининг узунлиги BC ён томон ва AD томон узунликлари йиғиндисига тенг. Трапециянинг A ва B бурчакларининг биссектрисалари CD томонда кесишишини исботланг.

83. Агар ABC учбурчакка ички чизилган айлана маркази O бўлиб, M нуқта AB томоннинг ўртаси ва $CO = MO$ бўлса, $\angle COM$ бурчакнинг энг кичик қийматини топинг.

84. Айланага ички чизилган $ABCDE$ бешбурчакда $AC \parallel DE$ ва K нуқта BD кесманинг ўртаси. Агар $\angle AKB = \angle BKC$ бўлса, BE кесма AC кесманинг ўртасида кесишини исботланг.

85. Берилган ABC учбурчакнинг BC томонида D нуқта олинган. ADB ва ADC бурчаклар биссектрисалари AB ва AC томонларни мос равишда E ва N нуқталарда, ABD ва ACD бурчакларнинг биссектрисалари DE ва DN кесмаларни мос равишда K ва L нуқталарда кессин. Ушбу $AE = AN$ тенглик $EN \parallel KL$ бўлганда ва фақат шу ҳолда бажарилишини исботланг.

86. Берилган $ABCD$ ромбнинг AB ва AD томонларида мос равишда E ва F нуқталар танланган. BC ва DE тўғри чизиқлар P нуқтада, CD

ва BF тўғри чизиқлар Q нуқтада кесишади. Агар $AE = DF$ бўлса, у ҳолда

а) $\dfrac{PE}{PD} + \dfrac{QF}{QB} = 1$ тенгликни исботланг;

б) P, A ва Q нуқталарни бир тўғри чизиқда ётишини кўрсатинг.

87. Қавариқ $ABCD$ тўртбурчакда $\angle CBD = \angle CAB$ ва $\angle ACD = \angle BDA$ бўлса, у ҳолда $\angle ABC = \angle ADC$ эканлигини исботланг.

88. $ABCD$ параллелограммда $AB+CD = AC$. Параллелограммнинг BC томонида $\angle ADB = \angle BDK$ бўладиган қилиб K нуқта танланган. $BK : KC$ нисбатни топинг.

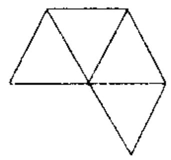
89. Қавариқ $ABCD$ тўртбурчак диагоналлари O нуқтада кесишади. Агар AOB ва COD учбурчакларга ташқи чизилган айланалар AD кесмада кесишса, у ҳолда $AO > AB$ тенгсизликни исботланг.

90. Ўткир бурчакли учбурчак исталган томонининг ўртасидан қарама-қарши учигача бўлган масофа, бу нуқтадан қолган томонларгача бўлган масофалар йиғиндисига тенг. Бу учбурчакнинг тенг томонли эканлигини исботланг.

91. $ABCD$ тўртбурчакда $AD \parallel BC$, M ва N нуқталар мос равишда AB ва CD томонларининг ўрталари. Агар MN тўғри чизиқ ABC ва ADC учбурчакларга ташқи чизилган айланалар марказларини туташтирувчи кесмани тенг иккига бўлса, у ҳолда $ABCD$ тўртбурчак параллелограмм эканлигини исботланг.

92. ABC учбурчакнинг AA_1, BB_1, CC_1 медианалари давом эттирилса, учбурчакка ташқи чизилган айланани мос равишда A_0, B_0, C_0 нуқталарда кесади. Агар ABC учбурчак медианалари кесишиш нуқтаси O ва $AO = A_0O$ бўлса, у ҳолда $A_0B_0C_0$ учбурчак тенг ёнли бўлишини исботланг.

93. Томонининг узунлиги натурал сон бўлган мунтазам кўпбурчакни қуйидаги шаклдаги (томони 1 га тенг бўлган 4 та мунтазам учбурчаклардан иборат) фигураларга бўлиш мумкинми?



94. $ABCD$ трапециянинг диагоналлари перпендикуляр ва O нуқтада кесишади, $\angle BAD = 90^0$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $EF \parallel AB$, EF кесма AC ва BD кесмаларни мос равишда P ва Q нуқталарда кесади. У ҳолда а) $EP = QF$; б) $EF = AD$ тенгликларни исботланг.

95. ABC учбурчакнинг AB томонида N нуқта олинган. ANC ва BNC учбурчакларга ички чизилган айланаларнинг радиуслари тенг. Агар бу айланаларнинг марказлари O_1 ва O_2, AB билан айланаларнинг уриниш нуқталари мос равишда P ва Q ҳамда $S_{ABC} = 6S_{PQO_2O_1}$ бўлса, у ҳолда

а) $10 \cdot CN + 5 \cdot AB = 7(AC + BC)$ тенгликни исботланг;

б) $(AC + BC) : AB$ нисбатни топинг.

96. Маркази O нуқтада бўлган S айлана ABC учбурчакка ички чизилган. AB ва AC томонларга мос равишда X ва Y нуқталарда уринувчи айлана O нуқтадан ўтади. XY кесма S айланага уринишини исботланг.

97. Қавриқ $ABCD$ тўртбурчакка ички чизилган айлана маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқ AB ва CD томонларни мос равишда X ва Y нуқталарда кесади. Агар $\angle AXY = \angle DYX$ бўлса, у ҳолда $AX/BX = CY/DY$ тенгликни исботланг.

98. Айланага ички чизилган $ABCD$ тўртбурчакнинг AB ва BC томонларида мос равишда X ва Y нуқталар $XBYD$ тўртбурчак параллелограмм бўладиган қилиб танланган. M ва N нуқталар мос равишда AC ва BD диагоналларининг ўрталари, AC ва XY тўғри чизиқлар L нуқтада кесишади. M, N, L ва D нуқталарнинг бир айланада ётишини исботланг.

99. ABC учбурчакка ички чизилган айлана BC, CA ва AB томонларга мос равишда A_1, B_1 ва C_1 нуқталарда уринади. A_1 нуқта орқали AA_1 кесмага перпендикуляр ℓ тўғри чизиқ ўтказилган, ℓ ва B_1C_1 тўғри чизиқлар X нуқтада кесишади. BC тўғри чизиқ AX кесманинг ўртасидан ўтишини исботланг.

100. Радиуслари r бўлган учта ω_1, ω_2, ω_3 айлана S нуқта орқали ўтади ва R $(R > r)$ радиусли ω айланага мос равишда T_1, T_2 ва T_3 нуқталарда ичкаридан уринади. T_1T_2 тўғри чизиқ ω_1 ва ω_2 айланаларнинг иккинчи (S нуқтадан фарқли) кесишиш нуқтаси орқали ўтишини исботланг.

Жавоблар ва ечимлар

1. Жавоб: 1 ёки 2 ёки 3.

Рост гапирадиганлар сони бирдан кўп эмас. Агар улар сони бирдан ортиқ бўлса, уларнинг гаплари бир хил бўлиши керак. Агар барча одамлар ёлғон гапирадиган бўлса, у ҳолда $n = 1$. Агар оролда битта одам рост гапирадиган бўлса, у ҳолда ёлғончилар сони $(n-1)$ та бўлади ва k рақамли ростчининг гапидан $0 + k = n - 1$, яъни рост гапирадиган одамнинг рақами $(n - 1)$ бўлади. Агар $n > 3$ бўлса, $(n - 2)$ рақамли ёлғончи одамнинг гапи рост бўлиб қолади, чунки $(n - 2) - 1 = n - 3$. Демак, $n \leq 3$. Агар $n = 2$ бўлса, биринчи одам рост, иккинчиси эса ёлғон гапиради. Агар $n = 3$ бўлса, у ҳолда оролдагилардан биринчиси ёлғон, иккинчиси рост, учинчиси эса ёлғон гапиради.

2. Каримда 5 см ли таёқдан m та, 6 см ли таёқдан n та бўлсин. У ҳолда $5m + 6n = 600$ (6 м =600 см) бўлади. Бу тенгламадан m сонининг 6 га, n сонининг эса 5 га бўлиниши келиб чиқди. 5 см узунликдаги 6 та таёқдан, 6 см узунликдаги 5 та таёқдан. Ҳар бирининг умумий узунлиги 30 см бўлган 20 та гуруҳлар тузамиз. Бунда битта гуруҳ 5 см узунликдаги 6 та таёқдан, 6 см узунликдаги 5 та таёқдан ташкил топади. Бу гуруҳлардан томони 60 см бўлган мунтазам ўнбурчак ясаймиз.

3. Жавоб: 171819, 343536, 515253, 545556, 686970, 858687.

Агар биринчи икки хонали сон $\overline{ab}$ бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган олти хонали сон $\overline{ababab} + 102 = \overline{ab} \cdot 10101 + 102$ бўлади. Масала шартига кўра бу сон 17 га бўлинади. Агар 10101 ва 17 сонлари ўзаро туб ва $102 = 17 \cdot 6$ эканлигини ҳисобга олсак, $\overline{ab}$ сонининг 17 га бўлиниши келиб чиқади.

4. Жавоб 1000.

Кетма-кет жойлашган 12 сон устида бажариладиган амални "қадам"деб атаймиз. Фарходнинг ҳар бир қадамидан кейин жуфт ўринда жойлашган мусбат бирлар сони билан тоқ ўринда жойлашган манфий бирлар сонининг йиғиндиси ўзгармайди. Дастлаб бу йиғинди 1000 га тенг эди ва 60 та қадамдан кейин у ўзгармайди. Агар Салим тоқ ўриндаги сонлар ишорасини ўзгартирса, у ҳолда жуфт ўриндаги мусбат бирлар ўзгармайди ва тоқ ўриндаги манфий бирлар мусбат бирларга айланади. Уларнинг йиғиндиси 1000 га тенг.

5. Жавоб: 6 та

$1, 2, ..., n$ сонларни масала шартидагидек ёзиш учун керак бўлган рангларнинг энг кам сонини $f(n)$ деймиз ва $f(n) = \left[\dfrac{k+1}{2}\right]$ эканлигини исботлаймиз, бу ерда $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Ушбу $1, 2, 2^2, ..., 2^{k-1}$ сонлардан исталган учтасини бир хил рангда ёзиб бўлмайди. Демак, агар k жуфт бўлса $f(n) \geq \frac{k}{2}$ ва агар k тоқ бўлса $f(n) \geq \frac{k+1}{2}$. Умуман, $f(n) \geq \left[\frac{k+1}{2}\right]$.

Энди $1, 2, ..., n$ сонларни $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ хилдаги ранглар билан масала шартидагидек ёзиш усулини келтирамиз. Айтайлик, ранглар $1, 2, ..., \left[\frac{k+1}{2}\right]$ сонлар билан рақамланган бўлсин. Исталган $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t} \leq n$ (бу ерда p_i – туб сон) сони учун $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_t$ йиғиндини $h(m)$ билан белгилаймиз. У ҳолда $h(m) < k$ бўлади. m сонини $\left[\frac{h(m)+1}{2}\right]$ тартиб рақамли рангли сиёҳ билан ёзамиз. Агар a сони b га, b сони c га бўлинса, у ҳолда $a > b > c$ ва $h(a) > h(b) > h(c)$ бўлади. Бундан $h(a) - h(c) \geq 2$, яъни $\left[\frac{h(a)+1}{2}\right] > \left[\frac{h(c)+1}{2}\right]$. Шундай қилиб a ва c сонлари турли рангда ёзилади. $2^{11} \leq 2004 < 2^{12}$ бўлгани учун $f(2004) = \left[\frac{12+1}{2}\right] = 6$.

6. Жавоб: 11.

Чемпионатда Африкадан x та жамоа қатнашган бўлсин. У ҳолда Африкалик жамоалар ўзаро $\frac{(x-1)x}{2}$ та ўйин ўтказишди ва улар тўплаган умумий очколар $\frac{(x-1)x}{2} + k$ бўлади, бу ерда k – Европа жамоалари устидан қозонилган ғалабалар сони. Шунингдек, Европа жамоалари тўплаган очколар $\frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k$ бўлади. У ҳолда, масала шартига кўра

$$9\left(\frac{(x-1)x}{2} + k\right) = \frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан $3x^2 - 22x + 10k - 36 = 0$. Охирги тенгламанинг дискриминанти $D = 121 - 3(10k - 36) = 229 - 30k$ тўла квадрат бўлиши зарур, чунки $x \in \mathbf{N}$. $k = 2$ ва $k = 6$ бўлганда D тўла квадрат бўлади. Агар $k = 2$ бўлса, у ҳолда $x = 8$ бўлади ва Африканинг энг яхши жамоаси $(x - 1) + k = 7 + 2 = 9$ очко йиғиши мумкин. Агар $k = 6$ бўлса, у ҳолда $x = 6$ бўлади ва Африканинг энг яхши жамоаси кўпи билан $(x - 1) + k = 5 + 6 = 11$ очко тўплайди.

7. Жавоб: 6 та.

Кўпайтма бешнинг қандай даражасига бўлиниши мумкинлигини ҳисоблаймиз. Бу сонлар $5^4 = 625$ дан кичик бўлгани учун ҳар бири $5^3 = 125$ га бўлиниши мумкин. Лекин, йиғинди бешга бўлинмагани учун улардан камида биттаси бешга бўлинмайди. Шунинг учун кўпайтма олтитадан ортиқ нол билан тугаши мумкин эмас. $407 = 250 + 125 + 32$ бўлганда $250 \cdot 125 \cdot 32$ кўпайтма олтита нол билан тугайди.

8. Жавоб: -2004.

Агар $a + 2005 = x$, $b + 1 = y$ десак, у ҳолда $(x + y)^2 = 4xy$ бундан $(x - y)^2 = 0$, яъни $x = y$. Демак, $a + 2005 = b + 1$, $a - b = -2004$.

9. Жавоб: йўқ.

Мумкин бўлсин деб фараз қиламиз. Агар a кесма орқали ўтувчи тўғ ри чизиқ b кесмани кесса, у ҳолда a дан b кесмага стрелка йўналтирамиз. У ҳолда, бир вақтда a дан b га ва b дан a га стрелка йўналмайди. Масала шартига кўра ҳар бир кесмадан 15 та стрелка чиқади ва барча стрелкалар сони $30 \cdot 15$ та бўлади. Ҳар бир кесмага 14 та стрелка йўналган бўлади (чунки ўзидан ўзига ва бу кесмадан стрелка йўналган кесмалардан бу кесмага стрелка йўналмайди). Бу ҳолда барча стрелкалар сони $30 \cdot 14$ та бўлади. Зиддият фаразимизни нотўғри эканлигини билдиради.

10. Жавоб: 17.45 ёки 17.15.

Айтайлик, соат 17.00 дан 18.00 гача автомобиллардан ҳеч бири чорраҳадан ўтмаган бўлсин. У ҳолда улар бир томонга (ёки чорраҳага қараб, ёки тескари йўналишда) қараб ҳаракатланган бўлади. Соат 17.00 да "Тико" (Т) чорраҳадан x масофада, "Матиз" (М) эса $y = 2x$ масофада, улар бир соатда босиб ўтган масофа z бўлсин. Агар A ва B автомобиллар чорраҳадан соат 17.00 дан олдин ўтишган бўлса, у ҳолда улар соат 18.00 да чорраҳадан $x + z$ ва $2x + z$ масофада бўлади. Лекин, $2(x + z) \neq 2x + z$, чунки $z \neq 0$. Шунингдек, соат 18.00 да улар чорраҳага қараб ҳаракатланаётган бўлими мумкин эмас. Демак, автомобиллиардан бирортаси соат 17.00 билан 18.00 оралиғида чорраҳадан ўтган. Бу машина М бўла олмайди, чунки Т чорраҳани М дан кейин кесиб ўтса, у ҳолда соат 17.00 да М чорраҳага яқинроқ масофада бўлади; агар Т чорраҳани олдинроқ кесиб ўтган бўлса, у ҳолда соат 18.00 да Т чорраҳадан узоқроқ масофада бўлар эди. Шундай қилиб, соат 17.00 ва 18.00 лар орасида Т чорраҳани кесиб ўтган, М эса кесиб ўтмаган. У ҳолда соат 18.00 да Т чорраҳадан $z - x$ масофада, М эса $2x - z$ (агар у соат 18.00 да чорраҳага қараб ҳаракатланаётган бўлса) ёки $2x + z$ масофада бўлади. Биринчи ҳолда $2x - z = 2(z - x)$, $3z = 4x$. Иккинчи ҳолда $2x + z = 2(z - x), z = 4x$. Шундай қилиб, соат

18.00 да Т чорраҳадан $\frac{3}{4}z$ ёки $\frac{1}{4}z$ масофада жойлашган. Шунинг учун у чорраҳани соат 17.45 да ёки 17.15 да кесиб ўтган.

11. Жавоб: 13 та.

Энг енгил тош A, оғирлиги ўсиш тартибида ундан кейинги тош B бўлсин. У ҳолда $\{A, B\}$ жуфтликнинг умумий оғирлиги фақат шу жуфтликнинг умумий оғирлигига тенг. Шунинг учун A ва B тошларнинг ҳар биридан камида иккита. $\{A, A\}$ жуфтликнинг умумий оғирлиги фақат шу жуфтликнинг умумий оғирлигига тенг. Демак, A тошдан камида 4 та бор. Шунингдек, энг оғир C тошдан камида 4 та бор ва оғирлиги бўйича ундан олдинги D тошдан камида 2 та. Бундан ташқари, биринчи шартга кўра камида битта шундай E тош борки, у A ва B тошлардан оғир, C ва D тошлардан енгил. Шундай қилиб тўпламдаги тошлар сони $4+4+2+2+1=13$ тадан кам эмас. Ушбу 13 та тошдан иборат $\{1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5\}$ тўплам масала шартини қаноатлантиради.

12. Берилган сонларни a, b ва c билан белгилаймиз. Айтайлик, $x =$ ЭКУБ(b, c), $y =$ ЭКУБ(c, a), $z =$ ЭКУБ(a, b) бўлиб, ЭКУБ$(a, b, c) = 1$ бўлсин. У ҳолда $a = kxy, b = lxz$ ва $c = my$, бу ерда k, l, m - бирор натурал сонлар. Фаразимизга кўра, $(kz \cdot lxz) \vdots (kyz + lxz)$, демак $(ky \cdot lx \cdot z) \vdots (ky + lx)$. Булардан ЭКУБ$(ky, ky + lx) =$ ЭКУБ$(ky, lx) = 1$. Шунингдек, ЭКУБ$(lx, ky + lx) = 1$. Демак, $z \vdots (ky + lx)$. Бундан, $z \geq ky + lx \geq x + y$. Шунингдек, $x \geq y + z$ ва $y \geq x + z$ тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу учта тенгсизлик бир вақтда бажарилмайди. Демак, фараз нотўғри.

13. Масала шартини битта 13579 дан ташкил топган тўплам қаноатлантиришини исботлаймиз. Айтайлик, $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ - беш хонали сон ва $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ бўлсин. Агар $a_1 \neq 1$ бўлса, у ҳолда $2 \leq a_1 < a_2$. Агар $a_2 \neq 3$ бўлса, $4 \leq a_2 < a_3$. Шунингдек $a_3 \neq 5$ бўлса, $6 \leq a_3 < a_4$ ва $a_4 \neq 7$ бўлса, $8 \leq a_4 < a_5$, яъни $a_5 = 9$. Шундай қилиб 13579 ва $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ сонларнинг камида битта ўриндаги рақамлари бир хил.

14. Жавоб: йўқ.

Мумкин деб фараз қиламиз. Координаталари бутун сон бўлган O нуқтани қараймиз. Бу нуқтага n та ҳар хил туб бўлувчига эга бўлган a сони ёзилган бўлсин. Текисликда бутун координатали A_1 нуқтани ва OA_1 тўғри чизиқда $A_1O = OB_1$ $(A_1 \neq B_1)$ қилиб B_1 нуқтани оламиз. O, A_1 ва B_1 бутун координатали нуқталар бир тўғ -

ри чизиқда ётади. Демак, бу нуқталарга ёзилган сонлар бирдан катта умумий бўлувчига эга, яъни бирор p_1 туб сонга бўлинади. OA_1 тўғри чизиқда ётмаган бутун координатали A_2 нуқта ва OA_2 тўғри чизиқда $OA_2 = OB_2(A_2 \neq B_2)$ қилиб B_2 нуқтани қараймиз. Юқоридагидек фикр юритиб O, A_2 ва B_2 нуқталарга ёзилган сонларнинг ҳар бири бирор p_2 туб сонга бўлинишини топамиз. Бунда $p_1 \neq p_2$, чунки O, A_1 ва A_2 нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди. Бу жараённи давом эттириб OA_1, OA_2, $OA_3, ...,$ OA_{n+1} тўғри чизиқларни қурамиз. Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бирига a сонининг битта туб бўлувчиси мос келади. Шундай қилиб, a сони $n+1$ та ҳар хил туб бўлувчига эга. Зиддият фаразимизнинг нотўғри эканини билдиради.

15. Жавоб: 19 та.

Масалада кўрилаётган йиғиндилар 0 дан 19 гача, яъни 20 та қиймат қабул қила олиши мумкин. Барча 20 та қийматни ҳосил қилиш мумкин деб фараз қилайлик. У ҳолда, жадвалда фақат 0 рақамлар ёзилган устун ёки сатр топилади. Агар у устун бўлса, ҳар бир сатрдаги сонлар йиғиндиси кўпи билан 18 бўлади. Агар у сатр бўлса битта устундаги сонлар йиғиндиси 9 дан катта эмас ва ҳар бир қатордаги сонлар йиғ индиси 10 дан 19 гача қиймат қабул қилиши лозим. Аммо бундай бўлиши мумкин эмас, чунки битта сатрга фақат 0 рақамлари ёзилган.

Қуйида йиғиндилар ҳар хил 19 та қийматни қабул қиладиган жадвал келтирилган.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

16. Жавоб: йўқ.

Жадвалдаги сатрларни кетма - кет 0 дан 9 гача рақамлаб чиқамиз. Шашкалар эгаллаб турган қаторларнинг рақамлари йиғ индиси юришлардан сўнг ҳам ўз жуфт - тоқлигини ўзгартирмайди, чунки бу йиғиндидан ҳар гал 2 айирилади. Бошланғич ҳолатда бу йиғ инди $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$. Бу сон тоқлигидан у 0 га тенг бўла олмайди. Шунинг учун бошланғич ҳолатдан масалада сўралган ҳолатга эришиб бўлмайди.

17. Тумандаги 11 - синфни битирувчилар сони N бўлсин, N_i - эса i - мактаб битирувчилари сони бўлсин. У ҳолда $\frac{1}{2}N - N_i \geq 0$ бўлади. Агар бирор мактаб учун $N_i = \frac{1}{2}N$ бўлса, тумандаги битирувчи қизлар сони, йигитлар сонига тенглигидан, шу мактабдагии барча йигитлар бошқа мактабдан келган қизлар билан, қизлар эса бошқа мактабдан келган йигитлар билан рақсга тушишади. У ҳолда $\frac{N}{2}$ та жуфтлик рақсга тушади ва масала шарти бажарилади. Энди барча мактаблар учун $\frac{1}{2}N - N_i > 0$ бўлсин. У ҳолда ҳар хил мактаблик ихтиёрий қиз ва йигит бирга рақсга тушсин деб, уларни ҳисобдан чиқазамиз. Унда шу икки мактаб учун $\frac{1}{2}N - N_i$ айирма ўзгармайди, аммо бошқа мактаблар учун биттага камаяди. Агар барча мактаблар учун бу айирма мусбат бўлса, яна шу жараённи такрорлаймиз. Шу жараённи бирор i учун $\frac{1}{2}N - N_i = 0$ бўлгунча давом эттирамиз. Бирор i учун $\frac{1}{2}N = N_i$ бўлганда эса юқоридагидай иш тутамиз.

18. Тескарисини фараз қиламиз: Ихтиёрий иккита сатрда бир хил рангга бўялган катаклар сони тенг бўлмасин. Унда жадвалда бир хил рангга бўялган катаклар камида $0+1+2+...+14 = 105$ та, жадвалдаги катаклар камида $3 \cdot 105 = 315$ та бўлади. Аммо, 15×15 ўлчамли жадвалда 225 та катак бор. Демак, қайсидир иккита сатрда бир хил рангга бўялган катаклар сони тенг.

19. Шартга кўра берилган сонларнинг барчаси тоқ, улардан камида иккитаси 5 га каррали ёки камида биттаси 25 га каррали. Демак, кўпайтмаси 25 га каррали бўлган иккита сонни танлаш мумкин. Улар a ва b, берилган сонлар эса $a_1 = a, a_2 = b, a_3, ..., a_{25}$ бўлсин. Айтайлик, кўпайтмаси (яъни $aba_k (3 \le k \le 25)$) 25 билан тугайдиган учта сон топилмасин. Бундай кўпайтмаларнинг кўпайтмасини қараймиз

$$aba_3 \cdot aba_4 \cdot ... \cdot aba_{25} = (ab)^{22} \cdot (aba_3a_4...a_{25}).$$

Бу тенгликнинг чап қисмидаги ҳар бир aba_k кўпайтмани 4 га бўлганда 3 қолдиқ қолади. Шунинг учун чап қисмидаги кўпайтмани 4 га бўлганда қолдиқ 3^{23} ни 4 га бўлганда қолдиқ (яъни 3) билан бир хил бўлади. Тенгликнинг ўнг қисмидаги ҳар бир кўпайтувчини 4 га бўлганда 1 қолдиқ қолади. Зиддият фаразимиз нотўғрилигини кўрсатади.

20. $\overline{a0a0...a0b0c0c0...c0c} = \underbrace{\overline{a0a0a0...a}}_{2003\text{ та}}\underbrace{00...0}_{2002\text{ та}} + \underbrace{\overline{c0c0...c0c}}_{2003\text{ та}} + (b-c-a) \cdot 10^{1002}$. Тенгликнинг чап қисми ва ўнг қисмидаги дастлабки иккита қўшилувчи 37 га бўлинади. Шунинг учун $(b-c-a) \cdot 10^{1002}$, яъни $b-c-a$ сони 37 га бўлинади. Демак, $b = a + c$.

21. Дастлабки 20 та спортчини қараймиз. Масала шартига кўра a - ва $(a+10)$ - спортчилардан фақат биттаси қизил кийимда бўлиши мумкин $(1 \le a \le 10)$. Демак, дастлабки 20 та спортчидан кўпи билан 10 та спортчи қизил кийимда. Шунингдек, кейинги ҳар бир 20 таликда ҳам кўпи билан 10 та спортчи қизил кийимда.

22. Айтайлик қаторга $a_1, a_2, ..., a_{40}$ сонлар шу тартибда ёзилган бўлиб, бундай сон мавжуд бўлмасин. $a_3, a_5, ..., a_{39}$ сонларининг ҳар бири иккита қўшнига эга. Фаразимизга кўра бу сонлар шу қўшниларининг камида биттасидан катта бўлади. $a_3, a_5, ..., a_{39}$ сонларининг ҳар бирига шу сондан кичик бўлган қўшнисини мос қўямиз. Агар битта жуфт тартиб рақамли сон бир вақтда $a_3, a_5, ..., a_{39}$ лардан иккитасига мос келган бўлса, у ҳолда бу сон иккита қўшнисидан кичик бўлади. Шундай қилиб, 19 та тоқ тартибли $a_3, a_5, ..., a_{39}$ сонларга мос келувчи жуфт тартиб рақамли сонлар турлича экан. Бу сонлар $b_1, b_2, ..., b_{19}$ бўлса, $19 + b_1 + b_2 + ... + b_{19} \leq a_3 + a_5 + ... + a_{39}$ бўлади. Агар $b_1, b_2, ..., b_{19}$ лар орасида қатнашмаган жуфт тартиб рақамли сон b бўлса, масала шартига кўра $b + b_1 + ... + b_{19} = a_1 + a_3 + ... + a_{39} + 72$ бўлгани учун $b - a_1 = (a_3 + a_5 + ... + a_{39} - b_1 - b_2 - ... - b_{19}) + 72 \geq 19 + 72 = 91$ бўлади. Икки хонали b ва a_1 сонлари учун $b - a_1 \leq 99 - 10 = 89$ эканлигини ҳисобга олсак, фаразимиз нотўғри эканлиги келиб чиқади.

23. Жавоб: 45.

Айтайлик, $p = \overline{abcba} (a \neq 0)$ симметрик сон 37 га бўлинсин. У ҳолда

$$p = 10000a + 1000b + 100c + 10b + a = 10001a + 1010b + 100c =$$

$$= 37(270a + 27b + 3c) + 11(a + b - c)$$

бўлгани учун $a+b-c$ сони 37 га бўлиниши зарур. Агар $-8 \leq a+b-c \leq 18$ эканлигини ҳисобга олсак, $a + b - c = 0$, яъни $c = a + b$, бу ерда $a \in \{1, 2, ..., 9\}$, $a+b \leq 9$ ($b \in \{0, 1, ..., 9-a\}$). Бунда $a = 1$ бўлса, b рақам 9 та қийматдан биттасини; $a = 2$ бўлса 8 та қийматдан биттасини; ..., $a = 9$ бўлса b битта қиймат қабул қилади. Шундай қилиб, 37 га бўлинадиган беш хонали симметрик сонлар $9 + 8 + 7 + ... + 1 = 45$ та.

24. Жавоб: 1002^2.

Айирмаси 1 га тенг бўлган арифметик прогрессиялар 2003 та: $\{1;2;3\}$, $\{2;3;4\}, ..., \{2003;2004;2005\}$; айирмаси иккига тенг бўлган арифметик прогрессиялар 2001 та: $\{1;3;5\}$, $\{2;4;6\}$,..., $\{2001;2003;2005\}$ ва ҳ.к. Арифметик прогрессия айирмаси 1002 дан ошмайди. Айирмаси 1002 бўлган арифметик прогрессия битта: $\{1;1003;2005\}$. Шундай қилиб барча арифметик прогрессиялар $1 + 3 + ... + 2001 + 2003 = \dfrac{1 + 2003}{2} \cdot 1002 = 1002^2$ та.

25. Жавоб: $1; 5; 9; 45$

Равшанки, $m = 1$ масала шартини қаноатлантиради. Энди $m \geq 2$ ва уни каноник ёйилмаси

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n} \quad (m^4 = p_1^{4\alpha_1} p_2^{4\alpha_2} ... p_n^{4\alpha_n})$$

бўлсин. Бу ерда $p_1 < p_2 < ... < p_n$ ($p_1, p_2, ..., p_n$ туб сон) ва $\alpha_i \in \mathbf{N}, i = 1, 2, ..., n$. Агар m сони масала шартини қаноатлантирса, у ҳолда

$$(4\alpha_1 + 1)(4\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}.$$

Тенгликни чап қисми тоқ бўлгани учун $p_1 \geq 3$. Агар $\alpha \geq 3$ бўлса, $3^\alpha > 4\alpha+1$; $\alpha \geq 2$ бўлса, $5^\alpha > 4\alpha+1$; $\alpha \geq 1$ ва $p \geq 7$ бўлса, $p^\alpha > 4\alpha+1$. Барча $\alpha \geq 1$ да $5^\alpha \geq 4\alpha + 1$ эканлигидан $p^\alpha < 4\alpha + 1$ тенглик фақат $p = 3$ да бажарилади. Юқоридаги фикрларга асосланиб $p_1 = 3$ ёки $p_1 = 5$ эканлигини топамиз.

1-ҳол. $p_1 = 5$. Унда $\alpha_1 = 1$ ва $5(4\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = 5p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$, $(4\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$. Лекин охирги тенглик $p_2 \geq 7$ да бажарилмайди. $m = 5$ масала шартини қаноатлантиради.

2-ҳол. $p_1 = 3$. Бу ҳолда $\alpha_1 = 1$ ёки $\alpha_1 = 2$

а) $\alpha_1 = 1$ бўлса, $5(4\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = 3p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$. Бундан $p_2 = 5$. Агар $\alpha_2 > 2$ бўлса, у ҳолда $3 \cdot 5^{\alpha_2} > 4\alpha_2 + 1$ бўлади ва юқоридаги фикрларга асосланиб $\alpha_2 = 1$ ёки $\alpha_2 = 2$ эканлигини топамиз.

Агар $\alpha_2 = 1$ бўлса, $25(4\alpha_3 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = 15p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$ ($p_3 \geq 7$) тенглик бажарилмайди.

Агар $\alpha_2 = 2$ бўлса, $45(4\alpha_3 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = 75p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$ ($p_3 \geq 7$). Бу тенгликни фақат чап қисми 9 га бўлинади. Демак, тенглик бажарилмайди.

б) $\alpha_1 = 2$ бўлса $9(4\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = 9p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$, яъни $(4\alpha_2 + 1)(4\alpha_3 + 1) \cdot ... \cdot (4\alpha_n + 1) = p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$. 1-ҳолда кўрганимиздек, агар $p_2 \geq 7$ бўлса, $n \leq 2$. Агар $n = 1$ бўлса, $m = 3^2$; $n = 2$ ва $p_2 = 5$ бўлса, $\alpha_2 = 1$, яъни $m = 3^2 \cdot 5$.

26. Жавоб: $p = 2$.

$p > 3$ бўлсин. У ҳолда $p^2 - 1$ сони 24 га бўлинади ва бирор k сони учун $p^2 + 2543 = (p^2 - 1) + 106 \cdot 24 = 24k$ бўлади. Бу ерда $k \geq 107$, чунки $p^2 - 1 \geq 24$. Айтайлик, $k = 2^r \cdot 3^s \cdot a$ бўлсин (a натурал сони 2 га ҳам, 3 га ҳам каррали эмас). Агар n сонининг барча натурал бўлувчилари сонини $\tau(n)$ билан белгиласак, у ҳолда

$$\tau(p^2 + 2543) = \tau(24k) = \tau(2^{r+3} \cdot 3^{s+1} a) = (r + 4)(s + 2)\tau(a).$$

Агар $a > 1$ бўлса, $\tau(a) \geq 2$ ва $\tau(p^2 + 2543) \geq 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ бўлади. Агар $a = 1$ ва $\tau(p^2 + 2543) < 16$ бўлса, у ҳолда $(r + 4)(s + 2) < 16$ бўлади. Яъни $r \leq 3$, $s \leq 2$. Бундан, $k = 2^r \cdot 3^s \leq 2^3 \cdot 3^2 = 24$. Лекин, $k \geq 107$. Шундай қилиб, $p > 3$ бўлса, $\tau(p^2 + 2543) \geq 16$. Энди $p = 2$ ва $p = 3$ бўлганда $\tau(2^2 + 2543) = 6$ ва $\tau(3^2 + 2543) = 16$ эканлигини топамиз.

27. Жавоб: $n \in \{1, 2, 3\}$.

Агар

$$\frac{n}{1!}+\frac{n}{2!}+...+\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n}{n!}=\frac{n}{1!}+\frac{n}{2!}+...+\frac{n}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdot ...\cdot 2+n(n-1)\cdot ...\cdot 3+...+n(n-1)+n+1}{(n-1)!}=\frac{(n-1)A-2}{(n-1)!}$$

эканлигини ҳисобга олсак, йиғинди бутун сон бўлиши учун 2 сони $(n-1)$ га бўлиниши зарур. Демак $n>3$. Агар $n=1,2,3$ бўлса, йиғинди мос равишда 1, 3 ва 5 сонларига тенг бўлади.

28. Агар a сони p га бўлинса, у ҳолда $a^{p-1}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$, акс ҳолда Ферманинг кичик теоремасига кўра $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}p)$. Шунинг учун

$$0\equiv 1^{p-1}+2^{p-1}+...+2004^{p-1}\equiv 0\cdot\left[\frac{2004}{p}\right]+1\cdot\left(2004-\left[\frac{2004}{p}\right]\right)(\mathrm{mod}p).$$

(1,2,3,...,2004 сонлардан $\left[\frac{2004}{p}\right]$ таси p га бўлинади, қолганлари эса бўлинмайди). Демак, $2004\equiv\left[\frac{2004}{p}\right](\mathrm{mod}p)$, яъни $p<2004$. Айтайлик, $2004=pq+r,\ 0\le r<p$, бўлсин. У ҳолда $\left[\frac{2004}{p}\right]=\left[q+\frac{r}{p}\right]=q$ ва $2004\equiv pq+r\equiv r(\mathrm{mod}p)$, $\left[\frac{2004}{p}\right]\equiv q(\mathrm{mod}p)$, яъни $r\equiv q(\mathrm{mod}p)$.

Агар $q<p$ бўлса, $r=q$ ва $2004=pq+q=(p+1)q\le(p+1)(p-1)=p^2-1$, яъни $p\ge\sqrt{2005}$, $p\ge 47$ бўлади. $p+1$ сони $2004=3\cdot 4\cdot 167$ нинг бўлувчиси бўлгани учун $p=166$ ёки $p=2003$ бўлиши мумкин. Лекин, 166 ҳам, 2003 ҳам туб сон эмас.

Агар $q\ge p$ бўлса, $2004\ge pq\ge p^2$, яъни $p\le 43$. У ҳолда текшириш орқали $2004\equiv\left[\frac{2004}{p}\right](\mathrm{mod}p)$ муносабат $p=17$ бўлганда бажарилишини топамиз.

29. Айтайлик, $b=mc, c\in\mathbf{N}$, бўлсин. У ҳолда,

$$(b+1)^m-1=b\left((b+1)^{m-1}+(b+1)^{m-2}+...+(b+1)+1\right)=$$

$$=b\left(Ab^2+((m-1)+(m-2)+...+2+1)\,b+m\right)=$$

$$=b\left(Ab^2+\frac{m(m-1)}{2}b+m\right)=b\left(Abmc+\frac{m(m-1)}{2}b+m\right)=$$

$$= bm\left(b\left(Ac + \frac{m-1}{2}\right) + 1\right) = bmd.$$

Бу ерда $d = b(Ac + \dfrac{m-1}{2}) + 1$ натурал сон (чунки $m - 1$ жуфт сон) ва d сонининг ҳар бир туб бўлувчиси ($d > 1$) b билан ўзаро туб.

30. Айтайлик, d сони ab сонининг бўлувчиси, $d \neq a, d \neq b$ ва $n^2 < d < n^2 + n$ бўлсин. У ҳолда, d ни $d_a \cdot d_b$ кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда d_a сони a нинг, d_b сони b нинг бўлувчиси. Шундай қилиб, d_a сони $(n^2, n^2 + n)$ интервалдаги иккита (d ва a) сонни бўлувчиси. Унда, $0 \neq d - a$ сони ҳам d_a сонига бўлинади ва $d_a \leq |d - a| < n$ бўлади. Шунингдек, $d_b < n$ ва $d = d_a d_b < n^2$ муносабатларни ҳосил қиламиз. Охирги тенгсизлик фаразимиз нотўғри эканлигини билдиради.

31. Жавоб: 1.

Ферманинг кичик теоремасига кўра $a_i^7 \equiv a_i (\mathrm{mod} 7)$. Бундан

$$a_1^7 + a_2^7 + ... + a_n^7 \equiv (a_1 + a_2 + ... + a_n) \equiv 2004^{2004} \equiv$$

$$\equiv (7 \cdot 286 + 2)^{2004} \equiv 2^{2004} \equiv 8^{668} \equiv (7 + 1)^{668} \equiv 1 (\mathrm{mod} 7).$$

32. Жавоб: 13.

$\dfrac{4n-2}{n+5} = \dfrac{a^2}{b^2}$ бўлсин, бу ерда ЭКУБ$(a, b) = 1$. У ҳолда, $n = \dfrac{2b^2 + 5a^2}{4b^2 - a^2} = -5 + \dfrac{22b^2}{4b^2 - a^2}$ бўлади. ЭКУБ$(b^2, 4b^2 - a^2) = 1$ бўлгани учун $4b^2 - a^2$ сони 22 нинг бўлувчиси бўлади. Равшанки, $4b^2 - a^2 \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$ ёки $4b^2 - a^2 \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$. Бундан, $4b^2 - a^2 = -1$ ёки $4b^2 - a^2 = 11$. Биринчи ҳолда $b = 0$. Иккинчи ҳолда $2b - a = 1$ ва $2b + 1 = 11$, яъни $a = 5, b = 3$. Шундай қилиб, $n = 13$.

33. Жавоб: 200.

$x = [x] + \{x\}$ тенгликдан

$$x^2 = [x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2 = [x^2] + 200 + \{x\}^2$$

эканлигини топамиз. Бундан, $0 \leq \{x\}^2 < 1$ тенгсизликни ҳисобга олсак,

$$[x^2] = \left[[x]^2 + 200 + \{x\}^2\right] = [x]^2 + 200,$$

яъни $[x^2] - [x]^2 = 200$.

34. Жавоб: $(\sqrt{1038}; \sqrt{980,99}), (\pm\sqrt{975}; -\sqrt{980,99}), (\pm\sqrt{975}; \sqrt{1043,99})$.

$x^2 + [y^2] = 1999$ тенгликдан $|x| < 45$ ва $|[y]| \leq 44$ ни ҳосил қиламиз. Айтайлик, $x = p + \alpha$ ва $y = q + \beta (p, q \in \mathbf{Z}, 0 \leq \alpha, \beta < 1)$ сонлари жуфтлиги берилган тенгликни қаноатлантирсин. У ҳолда биринчи тенгликдан $(q+\beta)^2 - p^2 = (q^2 - p^2) + 2q\beta + \beta^2 = 19,99$, яъни $q^2 - p^2 = 19,99 - (2q\beta - \beta^2)$. Бундан $-70 \le q^2 - p^2 \le 108$ муносабатга эга бўламиз.

Иккинчи тенгликдан

$$(p+\alpha)^2 + q^2 = p^2 + q^2 + 2p\alpha + \alpha^2 = 1999,$$

яъни $p^2 + q^2 = 1999 - (2p\alpha + \alpha^2)$ бўлади. Бундан $1909 \le p^2 + q^2 \le 2090$ муносабатни ҳосил қиламиз. Юқоридаги қўш тенгсизликлардан

$$920 \le q^2 < 1100 \text{ ва } 900 < p^2 < 1080,$$

яъни $31 \le |q| \le 32$ ва $31 \le |p| \le 32$ муносабатларни топамиз.

а) Айтайлик $|p| = 31$, яъни $p^2 = 961$ бўлсин. У ҳолда биринчи тенгликка кўра $y^2 = 980,99$. Агар $y = \sqrt{980,99}$ десак, $[y] = 31$ бўлади ва иккинчи тенгликдан $x^2 = 1038$, $x = \pm\sqrt{1038}$, $[x] = 32$ ёки $[x] = -33$. Шунингдек, агар $y = -\sqrt{980,99}$ десак $[y] = -32$ бўлиб, иккинчи тенгликдан $x^2 = 975$ ва $x = \pm\sqrt{975}$ ни топамиз.

б) Айтайлик, $|p| = 32$ бўлсин. У ҳолда биринчи тенгликдан $y^2 = 1043,99$, $y = \pm\sqrt{1043,99}$. Бундан $[y] = 32$ ёки $[y] = -33$. $[y] = 32$ деб иккинчи тенгликдан $x^2 = 975$, $x = \pm\sqrt{975}$; $[x] = 31$ ёки $[x] = -32$ ларни топамиз.

35. Жавоб: $\{1;4\}$.

Берилган тенгламага кўра x бутун сон. У ҳолда, $\left[\dfrac{x^2-3x+3}{2}\right] = \left[\dfrac{x^2-3x+2+1}{2}\right] = \left[\dfrac{(x-1)(x-2)+1}{2}\right] = \dfrac{(x-1)(x-2)}{2}$ бўлади ва берилган тенглама $\dfrac{(x-1)(x-2)}{2} + 1 = x, x \in \mathbf{Z}$ тенгламага тенг кучли. Охирги тенгламани ечиб $x_1 = 1$ ва $x_2 = 4$ ечимларини топамиз.

36. $2004^n - 3$ сони 1 ёки 3 рақами билан тугайди. Демак, $2004^n - 3$ ва $2004^n + 3$ сонлари орасида нол рақами билан тугайдиган натурал сон мавжуд эмас. Шунинг учун $\lg(2004^n - 3)$ ва $\lg(2004^n + 3)$ сонлари орасида бутун сон мавжуд эмас.

37. Жавоб: $n \ge 3$.

Индукция усулида барча n $(n \ge 3)$ учун бундай сонлар мавжудлигини исботлаймиз. Ҳақиқатдан ҳам $n = 3$ да $3! \cdot 5! = 6!$ тенглик тўғри. $n = k$ да

$$a_1!a_2!...a_{k-1}! = a_k!$$

тенгликни қаноатлантирувчи $a_1 < a_2 < ... < a_k$ сонлар мавжуд деб фараз қиламиз. Айтайлик $b = a_k! - 1$ бўлсин. У ҳолда,

$$a_1!a_2!...a_{k-1}! \cdot b! = a_k! \cdot (a_k! - 1)! = (a_k!)!.$$

Агар $a_{k+1} = a_k!$ деб, b ни a_k орқали қайта белгиласак,

$$a_1!a_2!...a_k! = a_{k+1}!$$

тенглик ўринли.

38. Жавоб: $\{503, 504, ..., 1001\}$

Берилганларга кўра

$$2004 = a^2-b^2+c^2-d^2 = (a-b)(a+b)+(c-d)(c+d) \geq (a+b)+(c+d) = 2004$$

бўлади. Бундан, $a - b = c - d = 1$. У ҳолда $b = a - 1$ ва $d = c - 1$ ва $a + b + c + d = 2a + 2c - 2 = 2004$, яъни $a + c = 1003$. Шартга кўра $a > b > c$ бўлгани учун $a \geq c + 2$. Бундан $2a \geq a + c + 2 > 1005$, яъни $a \geq 502$. Агар a энг катта бўлса, d энг кичик, яъни $d = 1$ бўлади. Унда $c = 2$ ва $a = 1001$. Шундай қилиб, $a \in \{503, 504, ..., 1001\}$.

39. Жавоб: 1; 2.

Ушбу $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ тенгсизликка кўра $2n^3 \geq n^4$, яъни $n \leq 2$. Агар $n = 1$ бўлса, $a = 1, b = 0$; агар $n = 2$ бўлса $a = b = 2$.

40. Жавоб: $(0, 0, 0, 2^{1002})$, $(2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001}, 2^{1001})$.

Агар a сони тоқ бўлса, у ҳолда $a^2 \equiv 1(\mathrm{mod} 8)$ $\left((2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 \equiv 1(\mathrm{mod} 8)\right)$. Шунинг учун берилган тенгламани қаноатлантирувчи x, y, z ва t сонлари жуфт сонлар. Айтайлик, $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $t = 2t_1$ бўлсин. У ҳолда берилган тенглама

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = 2^{2002}$$

кўринишга келади. Кетма -кет юқоридагидек фикр юритиб

$$x = 2^{1001}a, y = 2^{1001}b, z = 2^{1001}c, t = 2^{1001}d,$$

$0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ муносабатларга эга бўламиз. У ҳолда $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ бўлади. Бундан $a = b = c = d = 1$ ёки $a = b = c = 0$, $d = 2$.

41. Жавоб: $\{(-2; 6), (-2; -6), (0; 4), (-5; 9), (19; 99)\}$

Системанинг иккинчи тенгламасини

$$(y - (4 + 5x))(y - (4 - x)) = 0$$

кўринишига келтирамиз. Бундан, $y = 4 + 5x$ ёки $y = 4 - x$. Агар $y = 4 + 5x$ бўлса, у ҳолда биринчи тенгламага кўра $x = -2$, $x = 0$ ёки $x = 19$. Агар $y = 4 - x$ бўлса, биринчи тенгламадан $x = -2$, $x = 0$ ёки $x = -5$. Шундай қилиб тенгламанинг (x, y) ечимлари тўплами $\{(-2;6), (-2;-6), (0;4), (-5;9), (19;99)\}$ бўлади.

42. Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабат ва берилган тенгсизликдан фойдаланиб

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (a^3 + \frac{1}{a}) + (b^3 + \frac{1}{b}) + (c^3 + \frac{1}{c}) \geq 2a + 2b + 2c =$$

$$= (a + b + c) + (a + b + c) \geq (a + b + c) + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$.

43. Жавоб: $(-1;0) \cup (0;3)$.

Тенгсизлик $x + 1 \neq \sqrt{x+1}$ ва $x + 1 > 0$ бўлганда, яъни $x > -1, x \neq 0$ да маънога эга.

Берилган тенгсизликни чап қисми махражини иррационалликдан қутқарамиз

$$\frac{x^2(x + 1 + \sqrt{x+1})^2}{((x+1)^2 - x - 1)^2} < \frac{x^2 + 3x + 18}{(x+1)^2}, \quad \frac{x^2(x + 1 + \sqrt{x+1})^2}{(x^2 + x)^2} < \frac{x^2 + 3x + 18}{(x+1)^2}.$$

Охирги тенгсизликни ҳар икки қисмини $(x + 1)^2$ га кўпайтирамиз:

$$(x + 1 + \sqrt{x+1})^2 < x^2 + 3x + 18.$$

Агар $y = \sqrt{x+1}$ десак, $x = y^2 - 1$ бўлади. У ҳолда

$$y^4 + 2y^3 + y^2 < y^4 + y^2 + 16,$$

яъни $y < 2$. Демак $\sqrt{x+1} < 2$, ёки $-1 < x < 3$. Лекин $x > -1$ ва $x \neq 0$.

44. Айтайлик $x + y = a$ бўлсин. Унда

$$(\frac{1}{x^2} - 1)(\frac{1}{y^2} - 1) = \frac{1}{x^2 \cdot y^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + 1 = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2y^2} + 1 =$$

$$\frac{1 - (x+y)^2 + 2xy}{x^2y^2} + 1 = \frac{1 - a^2}{x^2y^2} + \frac{2}{xy} + 1 \geq$$

$$\geq \frac{1 - a^2}{\frac{(x+y)^4}{16}} + \frac{2}{(\frac{x+y}{2})^2} + 1 = \frac{16 - 16a^2}{a^4} + \frac{8}{a^2} + 1 = \frac{(a^2 - 4)^2}{a^4}.$$

Шартга кўра $a^2 \leq 1$. Демак, $a^2 - 4 \leq -3$ ёки $(a^2-4)^2 \geq 9$. Шундай қилиб,

$$\frac{(a^2-4)^2}{a^4} \geq \frac{9}{a^4} = \frac{9}{(x+y)^4}.$$

45. Ушбу $\dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}$ тенгсизликдан фойдаланамиз:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{(3a-b)+(3b-c)+(3c-d)+(3d-a)}{4} =$$

$$= \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{1}{2}.$$

46. Жавоб: $|x| = |y| = |z| = \sqrt{2}$.

Умумийликка зарар етказмасдан $x^2 \leq y^2 \leq z^2$ деймиз. У ҳолда $x^2 - \dfrac{8}{x^4} \leq y^2 - \dfrac{8}{y^4} \leq z^2 - \dfrac{8}{z^4}$. Бундан ва берилган тенгсизликдан

$$3x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 6 + x^2 - \frac{8}{x^4},$$

яъни $2x^2 + \dfrac{8}{x^4} \leq 6$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Аммо,

$$2x^2 + \frac{8}{x^4} = x^2 + x^2 + \frac{8}{x^4} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{8}{x^4}} = 6.$$

Шундай қилиб, $6 \leq 2x^2 + \dfrac{8}{x^4} \leq 6$, яъни $2x^2 + \frac{8}{x^4} = 6$. Юқоридаги муносабатларда тенглик $x^2 = y^2 = z^2$, $2x^2 + 2006 = \dfrac{8}{x^4}$ бўлганда бажарилади. Бундан, $|x| = |y| = |z| = \sqrt{2}$.

47. Жавоб: $2\sqrt{2} - 1$.

Агар $n = 1$ десак, $\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(1+p)$, яъни $p \geq 2\sqrt{2} - 1$ ни ҳосил қиламиз. $p_1 = 2\sqrt{2} - 1$ бўлсин. Исталган $n \in N$ учун

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leq \frac{1}{2}n(n+p_1)$$

тенгсизлик математик индукция усулида исботланади.

48. Тенгсизликдаги ўзгарувчиларнинг ўринларини алмаштириш мумкин бўлгани учун $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда

$$a^{17} \leq a^{10}b^7, \quad b^{17} \leq b^{10}c^7, \quad c^{17} \leq 1, \quad -c^{10}a^7 \leq 0$$

тенгсизликлар ўринли. Бу тенгсизликларнинг мос қисмларини қўшиб, керакли тенгсизликни ҳосил қиламиз.

49. Берилган тенгсизликни чап қисмидаги қавсларни очсак ва берилган тенгликдан фойдалансак, у ҳолда

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)=\left(\frac{bc}{y}+\frac{yz}{c}\right)+\left(\frac{xz}{a}+\frac{ac}{z}\right)+$$

$$+\left(\frac{xy}{b}+\frac{ab}{x}\right)=\left(\frac{(1-y)c}{y}+\frac{y(1-c)}{c}\right)+\left(\frac{(1-a)z}{a}+\frac{a(1-z)}{z}\right)+$$

$$+\left(\frac{x(1-b)}{b}+\frac{(1-x)b}{x}\right)=\left(\frac{c}{y}-c+\frac{y}{c}-y\right)+\left(\frac{z}{a}-z+\frac{a}{z}-a\right)+$$

$$\left(\frac{x}{b}-x+\frac{b}{x}-b\right)=\left(\frac{c}{y}+\frac{y}{c}\right)+\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)+\left(\frac{x}{b}+\frac{b}{x}\right)-(a+x)-$$

$$-(b+y)-(c+z)\geq 2+2+2-1-1-1=3.$$

бўлади.

50. Айтайлик, $x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots+\cfrac{1}{99}}}$ ва $y=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots+\cfrac{1}{100}}}$ бўлиб,

$i=1,2,3,\ldots 97$ учун $x_i=\cfrac{1}{(i+2)+\cfrac{1}{(i+3)+\ldots+\cfrac{1}{99}}}$, $j=1,2,3,\ldots,98$

учун $y_j=\cfrac{1}{(j+2)+\cfrac{1}{(j+3)+\ldots+\cfrac{1}{100}}}$ бўлсин. У ҳолда,

$$|x-y|=\left|\frac{1}{2+x_1}-\frac{1}{2+y_1}\right|=\frac{|y_1-x_1|}{(2+x_1)(2+y_1)}=\frac{\left|\frac{1}{3+y_2}-\frac{1}{3+x_2}\right|}{(2+x_1)(2+y_1)}=$$

$$\frac{|x_2-y_2|}{(2+x_1)(2+y_1)(3+x_2)(3+y_2)}=\frac{\left|\frac{1}{x_3+4}-\frac{1}{y_3+4}\right|}{(2+x_1)(2+y_1)(3+x_2)(3+y_2)}=$$

$$=\ldots=\frac{|x_{97}-y_{97}|}{(2+x_1)(2+y_1)(3+x_2)\cdot\ldots\cdot(98+x_{97})(98+y_{97})}=$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{99} - \frac{1}{99+\frac{1}{100}}\right|}{(2+x_1)\cdot \ldots \cdot (98+x_{97})(98+y_{97})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{100}}{(2+x_1)\cdot \ldots \cdot (98+x_{97})(98+y_{97})\cdot 99 \cdot (99+y_{98})}$$

бўлади. Агар $x_i > 0$ ва $y_i > 0$ эканини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$|x-y| = \frac{1}{(2+x_1)(2+y_1)\cdot \ldots \cdot (99+y_{98})\cdot 99 \cdot 100} <$$

$$< \frac{1}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots \cdot 98\cdot 98\cdot 99\cdot 99\cdot 100} = \frac{1}{99!\cdot 100!}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

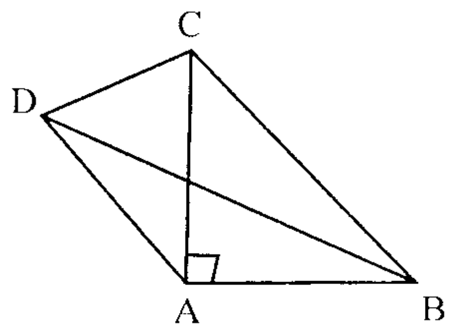
51. Жавоб: $\lg^2(5+\sqrt{35}) > \lg(6+\sqrt{35})$.

$$\lg^2(5+\sqrt{35}) = \lg^2(\frac{35-25}{\sqrt{35}-5}) = \lg^2\frac{10}{\sqrt{35}-5} = (1-\lg(\sqrt{35}-5))^2 =$$

$$= \lg^2(\sqrt{35}-5) + 1 - 2\lg(\sqrt{35}-5) > 1 - \lg(60-10\sqrt{35}) =$$

$$= 1-(1+\lg(6-\sqrt{35})) = -\lg(6-\sqrt{35}) = \lg\frac{1}{6-\sqrt{35}} = \lg(6+\sqrt{35}).$$

52. Чизмада келтирилганидек $ABCD$ тўртбурчак қурамиз ($c \in AD$ бўлиши ҳам мумкин унда $ABCD$ тўртбурчак бўлмайди). Унда $AD = y$, $AC = x$, $AB = z$, $\angle DAC = 60^0$ ва $\angle BAC = 90^0$. Косинуслар теоремасига кўра, $DC = \sqrt{x^2+y^2-xy}$, $BC = \sqrt{x^2+z^2}$, $BD = \sqrt{y^2+z^2+yz\sqrt{3}}$. У ҳолда, $DB \le DC + BC$ муносабат кераkли тенгсизликни беради.



53. Математик индукция усулида исботлаймиз. $n = 1$ да $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}$ тенгсизлик тўғри. Берилган тенгсизликни n да тўғри деб $n+1$ да тўғрилигини кўрсатамиз.

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \ldots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2n+3} <$$

$$< \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2n+3} = \frac{n+1}{2} + \left(\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2n+3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{2} +$$

$$+\frac{2\sqrt{(n+1)(n+2)} - (2n+3)}{2(2n+3)} = \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{4n^2+12n+8} - (2n+3)}{2(2n+3)} < \frac{n+1}{2}.$$

54. Ўрта арифметик ва ўрта геометрик миқдорлар орасидаги муносабатлардан фойдаланиб

$$(|a|+|b|+|c|)^2 = a^2+b^2+c^2+2|a||b|+2|b||c|+2|a||c| \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9,$$

$$3 = a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

тенгсизликларни, булардан эса $|a|+|b|+|c| \leq 3$ ва $|abc| \leq 1$, яъни $|a|+|b|+|c|-abc \leq 4$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

55. Жавоб: мумкин эмас.

Агар a, b, c сонлари бир хил бўлса, у ҳолда $a = b = c = \frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{c} = \frac{c^2}{a}$. Айтайлик, a, b, c сонлари орасида ҳар хил сонлар мавжуд бўлиб, a - уларнинг энг каттаси (ёки энг катталаридан бири) бўлсин. Агар $a > b$ бўлса, $\frac{a^2}{b} > a$ ва агар $a = b > c$ бўлса, $\frac{b^2}{c} > b = a$. Демак, берилган олтита соннинг энг каттаси a, b, c сонларнинг энг каттасидан катта экан. Шунингдек, берилган олтита соннинг энг кичиги a, b, c сонларнинг энг кичигидан кичик. Натижада камида тўртта ҳар хил сонга эга бўламиз.

56. Шартга кўра $|x-y| < 2$. Бундан, $x^2-2xy+y^2 < 4, (x+y)^2 < 4(xy+1)$, яъни $x+y < 2\sqrt{xy+1}$. Шунингдек, $y+z < 2\sqrt{yz+1}$ ва $x+z < 2\sqrt{zx+1}$. Охирги учта тенгсизликни мос қисмларини қўшиб керакли тенгсизликни ҳосил қиламиз.

57. $a+b > c$ бўлгани учун $a+2\sqrt{ab}+b > c$, яъни $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}$. Шунингдек, $\sqrt{a}+\sqrt{c} > \sqrt{b}$ va $\sqrt{b}+\sqrt{c} > \sqrt{a}$. Бу учта тенгсизликни мос равишда $\sqrt{c}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{a}$ ларга кўпайтирамиз ва мос қисмларни қўшиб керакли тенгсизликларни ҳосил қиламиз.

58. Биринчи томондан,

$$a_n = [n^2+(2\sqrt{19}+2)n+19+\sqrt{99}] \geq [n^2+(2\cdot 4+2)n+19+9] =$$

$$[n^2+10n+27] = (n+5)^2+2.$$

Иккинчи томондан эса,

$$a_n \leq [n^2+(2\cdot 5+2)n+19+10] = n^2+12n+29 < (n+6)^2.$$

Шундай қилиб, $(n+5)^2+2$ ва $(n+6)^2$ сонлари орасида $(n \geq 0)$ тўла квадрат бўлмаганлиги учун a_n кетма - кетликнинг ҳеч бир ҳади тўла квадрат бўла олмайди.

59. Жавоб: 14.

a_j, $j = 1, 2, ..., n$, сонининг энг кичик туб бўлувчисини q_j билан белгилаймиз. Айтайлик, $q_i = \max\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ бўлсин. Умумийликка зарар етказмасдан $q = q_1$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда $(3n+1)^2 \geq a_1 \geq q_1^2 \geq p_n^2$, бу ерда $p_n - n$ - инчи туб сон. Маълумки, $p_n \geq 3n+1$. Шунингдек, $n > 14$ бўлганда $p_n > 3n+1$ тенгсизлик математик индукция ёрдамида исботланади. Демак, $p_n = 3n+1$ тенглик $n \leq 14$ бўлганда бажарилиши мумкин. Бевосита текшириш орқали $p_n = 3n+1$ тенглик $n = 14$ да бажарилишини ва $\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, ..., 43^2\}$ тўплам масала шартларини қаноатлантиришини топамиз.

60. Жавоб: $3 \cdot 2^{2002} - 1$.

Ёрдамчи $b_n = 1 : (1 + a_n), n \geq 0$, кетма-кетлик киритамиз. У ҳолда,

$$b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n, \text{ агар } 2b_n < 1 \text{ бўлса}, \\ 2b_n - 1, \text{ агар } 2b_n > 1 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Биз $b_n = 1$ ҳолни қарамаймиз, чунки бу ҳолда кетма-кетлик ўзгармас бўлади ва $b_{2002} \neq \frac{1}{3}$. Шундай қилиб, $b_n = \{2b_{n-1}\} = \{2^n b_0\} = \left\{\frac{2^n}{k}\right\}$, бу ерда $k = a_0 + 1 \in \mathbf{N}$. Бундан $b_{2002} = \left\{\frac{2^{2002}}{k}\right\} = \frac{1}{3}$, ёки $\frac{2^{2002}}{k} - \frac{1}{3} = l \in \mathbf{N}$. Охирги тенгликдан $3 \cdot 2^{2002} = k(3l+1)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $k = 3 \cdot 2^m$ ва $b_n = \left\{\frac{2^{n-m}}{3}\right\}$. Масала шартига кўра b_n биринчи марта $n = 2002$ бўлганда $\frac{1}{3}$ га тенг бўлгани учун $m = 2002$ бўлади. Демак, $b_0 = \frac{1}{3 \cdot 2^{2002}}$, шунинг учун $a_0 = 3 \cdot 2^{2002} - 1$.

61. Жавоб: б) 1.

а) Математик индукция усулида исботлаймиз. $n = 2$ да $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$ муносабат тўғри. $n = k$, $k \geq 2$ да $a_k \geq k$ тенгсизликни тўғри деб, $n = k+1$ да $a_{k+1} \geq k+1$ тенгсизликни исботлаймиз.

$$a_{k+1} - (k+1) = a_k + \frac{k}{a_k} - k - 1 = \frac{(a_k - 1)(a_k - k)}{a_k} \geq 0.$$

Охирги тенгсизлик фаразимизга кўра тўғри.

б) Агар $n \geq 2$ бўлса, а) қисмга кўра

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n} \geq a_n + 1 \text{ ва } a_n \leq a_{n-1} + 1 \leq a_{n-2} + 2 \leq \ldots \leq a_2 + n - 2$$

бўлади. Бундан, $1 \leq \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{a_2 - 2}{n}$, $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \Big(1+$
$+\frac{a_n - 2}{n}\Big) = 1$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

62. Жавоб: йўқ.

$y = f(x)$ парабола бу кесмаларни кессин деб фараз қилайлик. У ҳолда $f(x) = 0$ тенгламанинг x_1 ва x_2 илдизлари учун $0 \leq x_1 \leq 1$, $3 \leq x_2 \leq 4$ муносабатлар, $f(x) = 5$ тенгламанинг x_3 ва x_4 илдизлари учун $-2 \leq x_3 \leq -1$ ва $8 \leq x_4 \leq 9$ муносабатлар ўринли. Бу тенгсизликлардан $3 \leq x_1 + x_2 \leq 5$ ва $6 \leq x_3 + x_4 \leq 8$ тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Лекин, Виет теоремасига кўра, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Зиддият фаразимизни нотўғри эканлигини билдиради.

63. Мусбат x лар учун $x^n + \frac{1}{x^n} \geq 2\sqrt{x^n \cdot \frac{1}{x^n}} = 2, n \in N$, тенгсизликдан фойдаланамиз. У ҳолда

$$P(x)P(\frac{1}{x}) = (ax^2 + bx + c)(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c) = a^2 + b^2 + c^2 + ab(x + \frac{1}{x})+$$

$$+bc(x+\frac{1}{x})+ca(x^2+\frac{1}{x^2}) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = (a+b+c)^2 = (P(1))^2.$$

64. Айтайлик, x_1 ва x_2 берилган учҳаднинг илдизлари бўлиб $x_1 \in (0;1)$ ва $x_2 \notin (0;1)$ бўлсин. У ҳолда Виет теоремасига кўра,

$$f(c) = c^2+bc+c = c(c+b+1) = x_1x_2(-x_1-x_2+x_1x_2+1) = x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) =$$

$$= x_1(1 - x_1) \cdot x_2(1 - x_2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Шартга кўра $x_1(1 - x_1) > 0$, $x_2(1 - x_2) \leq 0$, яъни $f(c) \leq 0$.

65. Берилган учҳадлар

$$f(x) = ax^2 + a_1x + a_2,\ g(x) = bx^2 + b_1x + b_2,\ h(x) = cx^2 + c_1x + c_2$$

ва $a > b > c$ бўлсин. Масала шартига кўра

$$f(x) - g(x) = (a - b)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2),\ a - b > 0,$$

$$g(x) - h(x) = (b - c)x^2 + (b_1 - c_1)x + (b_2 - c_2),\ b - c > 0$$

квадрат учҳадлар биттадан илдизга эга. Бундан, x нинг барча қийматлари учун

$$f(x) - g(x) = (a-b)(x-x_1)^2 \geq 0,$$

$$g(x) - h(x) = (b-c)(x-x_2)^2 \geq 0,$$

яъни $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$. Лекин, бирор x_0 учун $f(x_0) = h(x_0)$. Демак, $f(x_0) \geq g(x_0) \geq h(x_0) = f(x_0)$, яъни $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$.

66. Жавоб: Алининг.

Берилган тенгламаларнинг ҳар бири биттадан мусбат ва биттадан манфий илдизга эга. Биз

$$a + \sqrt{a^2+4b} + b + \sqrt{b^2+4c} + c + \sqrt{c^2+4a}$$

ва

$$a + \sqrt{a^2+4a} + b + \sqrt{b^2+4b} + c + \sqrt{c^2+4c}$$

ифодаларнинг қийматларини таққослашимиз зарур. Умумийликка зарар етказмасдан $a \geq b \geq c$ деб ҳисоблаймиз ва

$$\sqrt{a^2+4b} + \sqrt{b^2+4c} + \sqrt{c^2+4a} \geq \sqrt{a^2+4b} + \sqrt{b^2+4a} + \sqrt{c^2+4c} \geq$$

$$\geq \sqrt{a^2+4a} + \sqrt{b^2+4b} + \sqrt{c^2+4c}$$

қўш тенгсизликларни исботлаймиз. Чапдаги тенгсизликнинг ўхшаш ҳадларини қисқартириб, ҳар иккала қисмини квадратга ошириб ва натижани ихчамлаб

$$\sqrt{b^2+4c} \cdot \sqrt{c^2+4a} \geq \sqrt{b^2+4a} \cdot \sqrt{c^2+4c}$$

кўринишига келтирамиз. Бу тенгсизликни ҳам ҳар икки қисмини квадратга ошириб ва ихчамлаб

$$ab^2 + c^3 \geq cb^2 + ac^2$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан,

$$(b^2 - c^2)(a - c) \geq 0.$$

Фаразимизга кўра, $a \geq b \geq c$ бўлгани учун охирги тенгсизлик тўғри. Худди шу усул билан ўнг томондаги тенгсизлик ҳам исботланади. Демак, Алининг йиғиндиси катта экан.

67. Жавоб: $\dfrac{2547 \cdot 1545}{1002}$.

$g : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ функция $g(x) = f(x) + 2547$ тенглик билан аниқланган бўлсин. У ҳолда $g(x+y) = g(x)+g(y)$ ва $g(n) = n \cdot g(1)$ тенгликлар барча $x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q}$ ва $n \in \mathbf{N}$ ларда тўғри. Бундан $g(2004) = f(2004) + 2547 = 2 \cdot 2547$ бўлгани учун $g(1) = \dfrac{g(2004)}{2004} = \dfrac{2547}{1002}$ бўлади. Шундай қилиб, $n \in N$ да $g(n) = \dfrac{2547}{1002}n$, $f(n) = g(n) - 2547 = 2547\left(\dfrac{n}{1002} - 1\right)$. Демак, $f(2547) = \dfrac{2547 \cdot 1545}{1002}$.

68. Жавоб: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Айтайлик, f - масала шартларини қаноатлантирувчи функция ва $f(1) = p$ бўлсин. Берилган тенгламадан $x = y = 1$ деб $p = f(p)$ тенгликни топамиз. Агар $x = p,\ y = 1$ десак

$$p^2(f(p) + p) = (p + 1)f(f(p))$$

бўлади. Энди, $f(p) = p$ тенгликдан фойдаланиб, $2p^3 = (p+1)p$ тенгламани ва уни ечиб , $p = -\frac{1}{2}$ ёки $p = 0$ ёки $p = 1$ эканлигини ҳосил қиламиз. Шартга кўра $p > 0$, яъни $p = 1$, $f(1) = 1$. Берилган тенгламада $x = 1$ десак, $1 + f(y) = (1+y)f(y)$ ёки $f(y) = \dfrac{1}{y}$ ни топамиз. Бу функция берилган тенгламани қаноатлантиради.

69. Айтайлик, $p > 2$ туб сон. У ҳолда (2) шартдан $f(2p) = f(p+p) = f(p) + f(p) = 2f(p)$ ва (1) шартдан $f(2p) = f(2)f(p)$. Демак, $f(2) = 2$. Шунингдек (2) шартдан

$$\begin{aligned} f(4) &= f(2+2) = f(2) + f(2) = 4, \\ f(5) &= f(3+2) = f(3) + f(2) = f(3) + 2, \\ f(7) &= f(5+2) = f(5) + f(2) = f(3) + 4, \\ f(12) &= f(7+5) = f(7) + f(5) = 2f(3) + 6 \end{aligned}$$

ва (1) шартдан $f(12) = f(3) \cdot f(4) = 4f(3)$. Бундан, $f(3) = 3$. У ҳолда индукция усулидан фойдаланиб, $k \in N$ da $f(2k+1) = 2k+1$ исботланади. Демак, $f(2005) = 2005$.

70. Жавоб: $f(x) = x + 1, x \in \mathbf{Q}$.

Тенгламага $y = 1$ ни қўйиб, $f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1$, яъни $f(x+1) = f(x) + 1$ ни $(x \in \mathbf{Q})$ ҳосил қиламиз. Бу ердан $x \in \mathbf{Q}$ ва $n \in \mathbf{N}$ учун $f(x+n) = f(x) + n$, ёки $f(n) = n + 1$ ни топишимиз мумкин. $x = \dfrac{m}{n}$

бўлсин $(m, n \in Z, n \neq 0)$. У ҳолда,

$$m+1 = f(m) = f(nx) = f(x)f(n) - f(x+n) + 1 = f(x)(n+1) - f(x) - n + 1 =$$

$$= nf(x) - n + 1, \ f(x) = \frac{m}{n} + 1 = x + 1.$$

71. Жавоб: $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

Берилган тенгламада $x = y = 1$ бўлсин. У ҳолда $f^2(1) - f(1) - 2 = 0$ тенгламани ва уни ечиб $f(1) = -1$ ёки $f(1) = 2$ эканлигини топамиз. Демак, $f(1) - 1 \neq 0$. У ҳолда $y = 1$ да, $f(x) \cdot f(1) = f(x) + \frac{1}{x} + 1$ тенгламадан

$$f(x) = \frac{1}{f(1) - 1}(1 + \frac{1}{x})$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

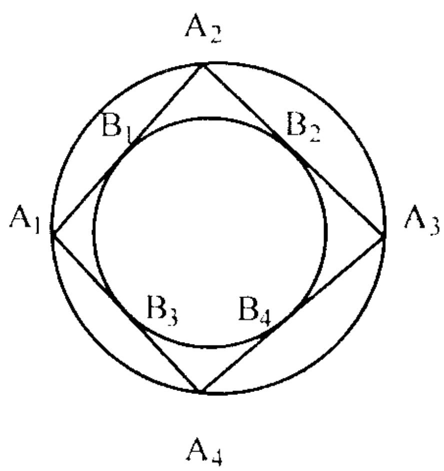
$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ ёки } f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Текшириш орқали фақат иккинчи функция берилган тенгламани қаноатлантиришини топамиз.

72. Жавоб: $f(x) \equiv 0$ ва $f(x) = \sqrt{x}$.

Биз $x = y = 1$ деб, $2f(1) = 2f^3(1)$ тенгликни ва ундан $f(1) = 0$ ёки $f(1) = 1$ эканлигини топамиз. Агар $f(1) = 1$ бўлса, у ҳолда $y = 1$ да $x + f(x) = f(x)(f(x) + 1)$ $x \geq 0$. Бундан, $f(x) = \sqrt{x}$. Бу функция берилган тенгликни қаноатлантиради. Агар $f(1) = 0$ бўлса, у ҳолда берилган тенгламадан барча $x \geq 0$ учун $f(x) = 0$ эканлигини топамиз.

73. Айтайлик, $A_1B_1 = A_1B_4 = x_1$, $B_4A_4 = A_4B_3 = x_2$, $B_3A_3 = A_3B_2 = x_3$, $B_2A_2 = A_2B_1 = x_4$, $\angle A_1A_2A_3 = 2\alpha$ ва $\angle A_2A_3A_4 = 2\beta$ бўлсин. У ҳолда, берилган тўртбурчак айланага ички чизилганлигини эътиборга олсак, $\angle A_1A_4A_3 = 180^0 - 2\alpha$, $\angle A_2A_1A_4 = 180^0 - 2\beta$ бўлади. Бундан, $\angle A_2B_1B_2 = \angle A_2B_2B_1 = 90^0 - \alpha$, $\angle A_3B_2B_3 = \angle A_3B_3B_2 = 90^0 - \beta$, $\angle A_4B_3B_4 = \angle A_4B_4B_3 = \alpha$ ва $\angle A_1B_4B_1 = \angle A_1B_1B_4 = \beta$ тенгликларни ва $A_2B_1B_2$, $A_3B_2B_3$, $A_4B_3B_4$, $A_1B_1B_4$ учбурчакларга синуслар теоремасини қўллаб, мос равишда



$B_1B_2 = 2x_4\sin\alpha$, $B_2B_3 = 2x_3\cos\beta$, $B_3B_4 = 2x_2\cos\alpha$, $B_1B_4 = 2x_1\sin\beta$ тенгликларни топамиз. Натижада исботи талаб қилинган тенгсизлик

$$\left(\frac{x_1+x_4}{2x_4\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{x_2+x_3}{2x_3\cos\beta}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_2}{2x_2\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{x_4+x_1}{2x_1\sin\beta}\right)^2\geq 8$$

кўринишни олади. Бу тенгсизликни чап қисмини S билан белгилаб, қуйидаги усулда Коши-Буняковский тенгсизлигин қўллаймиз:

$$2S=(\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\sin^2\beta)\cdot S\geq$$

$$\geq\left(\frac{x_1+x_4}{2x_4}+\frac{x_2+x_3}{2x_3}+\frac{x_3+x_4}{2x_2}+\frac{x_4+x_1}{2x_1}\right)^2.$$

Бундан,

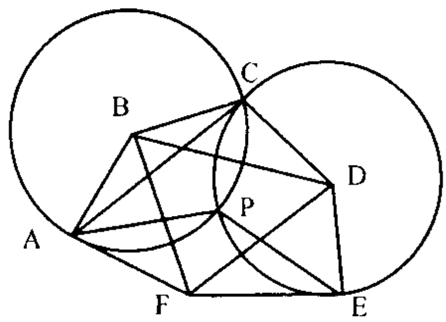
$$S\geq\frac{1}{8}\left(\frac{x_1}{x_4}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_4}{x_1}+4\right)^2$$

тенгсизликни ва ундан

$$S\geq\frac{1}{8}\left(4\cdot\sqrt[4]{\frac{x_1}{x_4}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_4}\cdot\frac{x_4}{x_1}}+4\right)^2=8$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

74. B марказли BC радиусли ва D марказли DC радиусли айланалар кесишиш нуқтаси P ($P\neq C$) бўлсин. У ҳолда $\angle APC = 180^0-\frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle CPE = 180^0-\frac{1}{2}\angle CDE$, $\angle EPA = 360^0-\angle APC-\angle CPE = \frac{1}{2}(\angle ABC+\angle CDE) = 180^0-\frac{1}{2}\angle EFA$. Яъни $\angle APE+\frac{1}{2}\angle EFA = 180^0$. Демак, F марказли FA радиусли айлана ҳам P нуқтадан ўтади. Бундан ташқари, $CP\perp BD$, $AP\perp BF$ ва $EP\perp DF$. Шундай қилиб, масала шартида айтилган тўғри чизиқлар P нуқтада кесишади.



75. Чеви теоремасига кўра, AD, BE ва CF кесмалар фақат ва фақат

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

бўлганда бир нуқтада кесишади. $BF = FA$ бўлгани учун бу тенгликдан

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$$BD = c\cos\widehat{B} = (a^2 + c^2 - b^2) : (2a),$$
$$DC = a - |BD| = (a^2 + b^2 - c^2) : (2a)$$

тенгликлардан $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$ ва BE кесма ABC учбурчак биссектрисаси эканлигидан

$$\frac{CE}{EA} = \frac{a}{c}$$

ларни топамиз. Булардан

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{a-1}{c} = 1, \quad \text{яъни } c(a^2 + b^2 - c^2) = a(a^2 + c^2 - b^2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

76. Тенгсизликни чап қисмини кўпайтувчиларга ажратиб

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})$$

шаклига келтирамиз. $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$ десак

$$(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z) \leq xyz.$$

Энди $-x+y+z = x_1, x-y+z = y_1, x+y-z = z_1$ алмаштириш бажарсак, у ҳолда, шартга кўра $x_1 > 0,\ y_1 > 0,\ x_2 > 0$ ва $x = \frac{y_1+z_1}{2}$; $y = \frac{x_1+z_1}{2}$; $z = \frac{x_1+y_1}{2}$ бўлади. Натижада юқоридаги тенгсизлик

$$x_1 y_1 z_1 \leq \frac{(x_1 + y_1)(y_1 + z_1)(x_1 + z_1)}{8}$$

кўринишга келади. Бу тенгсизлик

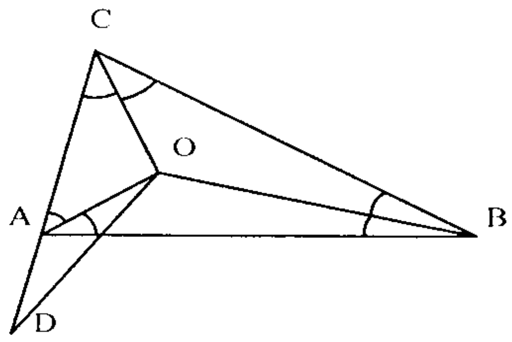
$$\frac{x_1 + y_1}{2} \geq \sqrt{x_1 y_1}, \quad \frac{y_1 + z_1}{2} \geq \sqrt{y_1 z_1}, \quad \frac{x_1 + z_1}{2} \geq \sqrt{x_1 z_1}$$

тенгсизликларни кўпайтириш натижасида ҳосил қилинади.

77. Жавоб: 35^0

Айтайлик, $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ бўлсин.

AC тўғри чизиқда $AD = AO$ бўладиган қилиб D нуқтани танлаймиз (A нуқта C ва D нуқталар орасида). У ҳолда $\angle ADO = \angle AOD$ ва $\alpha = \angle CAO = 2\angle AOD$ бўлади. $CA + AO = BC$ ва $AD = AO$ эканлигидан $BC = CA + AD = CD$ тенгликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, AOD ва COB учбурчаклар ўзаро тенг бўлади. Бундан $\angle ADO = \angle CBO = \beta$ ва $\angle B = 2\beta = 2\angle ADO = \alpha = 35^0$.



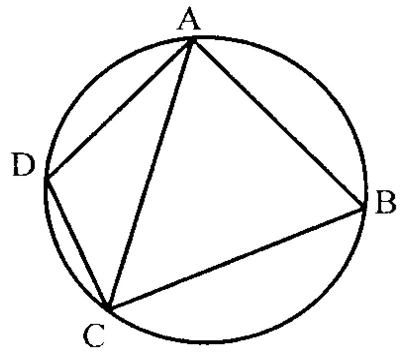
78. Айтайлик, $AB = a, BC = b, CD = c$ ва $DA = d$ бўлсин. У ҳолда

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{B} + \frac{1}{2}cd\sin\widehat{D} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2+d^2}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}.$$

79. Жавоб: 2) бўлмаслиги мумкин.

1) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ бўлсин. У ҳолда $\angle ADC = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - 60^0 = 120^0$ эканлигини ҳисобга олиб, ADC ва ABC учбурчакларга косинуслар теоремасини қўллаб тенгликни ҳосил қиламиз. Шартга кўра $b = c$. Бундан $a^2 + c^2 - ac = c^2 + d^2 + cd$, $a^2 - d^2 = ac + cd$, $(a-d)(a+d) = c(a+d)$, $a - d = c$ ва $a = c + d$.



2) Энди, $a = c + d$ бўлсин. У ҳолда

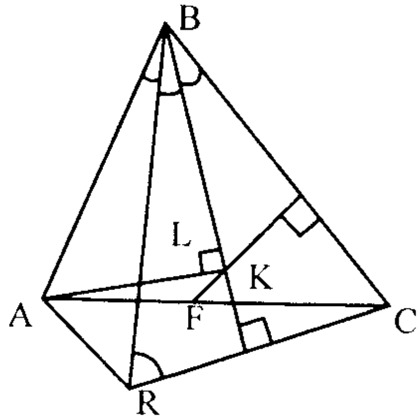
$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 + cd$ тенглик

$$(c+d)^2 + b^2 - (c+d)b = c^2 + d^2 + cd$$

кўринишга келади. Бундан, $(b - c)(b - d) = 0$, $b = c$ ёки $b = d$. Шундай қилиб, $a = c + d$ тенглик бажарилганда $b = c$ тенглик бажарилмаслиги мумкин.

80. R нуқта BK тўғри чизиққа нисбатан C га симметрик бўлсин. $AK = 2KC$ бўлгани учун C дан BK гача бўлган масофа AL масофадан икки марта кичик. Демак, $CR = AL$ ва $ALCR$ тўртбурчак - параллелограмм ($AL \parallel RC$, чунки $AL \perp BK$, $CR \perp BK$).

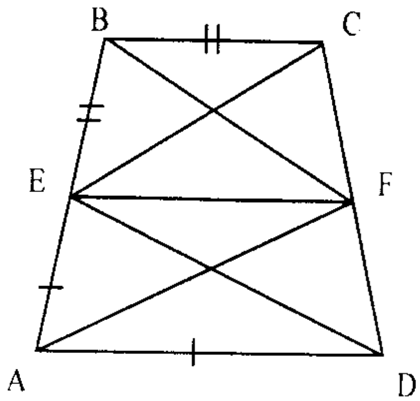
L нуқта RC кесманинг ўрта перпендикулярида ётганлиги учун $LR = LC$ бўлади. Бундан ташқари $LC = AR$, чунки $ALCR$ - параллелограмм. Шунингдек, $\angle ABK = 2\angle KBC$ тенгликни ҳисобга олсак, $\angle CBL = \angle LBR = \angle RBA$ тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб AL кесманинг ўрта перпендикуляри ва ABL бурчак биссектрисаси R нуқтада кесишади.



Бундан R нуқтанинг ALB учбурчакка ташқи чизилган айланада ётиши келиб чиқади. У ҳолда $\angle ARB = \angle ALB = 90^0$. Шунинг учун $CL \parallel AR \perp BR$ ва BL тўғри чизиққа нисбатан симметрияда BR кесма BC га, RL кесма LC га ўтгани учун $RL \perp BC$.

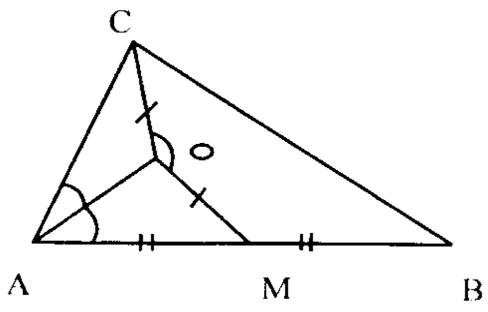
81. Тенг ёнли ACD учбурчакда CF медиана ҳам баландлик, ҳам биссектриса бўлади, яъни $\angle ACF = \angle FCD$ ва $\angle AFC = 90^0$. $\angle CBA = \angle CFA = 90^0$ бўлгани учун $ABCF$ тўртбурчак айланага ички чизилган. Айтайлик, $\angle ACF = \alpha$ бўлсин. У ҳолда $\angle DCF = \alpha$, $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle ABF = \alpha$, $\angle CBF = \angle CAF = 90^0 - \alpha$ ва $\angle CLB = 180^0 - \angle CBF - \angle ACB = 180^0 - (90^0 - \alpha) = \angle CBL$. Шундай қилиб, BCL учбурчак тенг ёнли, яъни $BC = CL$.

82. Трапециянинг AB томонида $AE = AD$ бўладиган қилиб E нуқта танланган бўлсин. У ҳолда $BE = BC$, $\angle AED = \angle ADE = 90^0 - \angle\frac{A}{2}$, $\angle BEC = \angle BCE = 90^0 - \angle\frac{B}{2}$, $\angle CED = 180^0 - \angle AED - \angle BEC = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90^0$. Шундай қилиб, CDE - тўғри бурчакли учбурчак. Трапециянинг A ва B бурчакларининг биссектрисалари CE ва ED кесмаларнинг ўрта перпендикулярида ётади. Тўғри бурчакли учбурчакда томонларининг ўрта перпендикулярлари эса гипотенузанинг ўртасида кесишади.



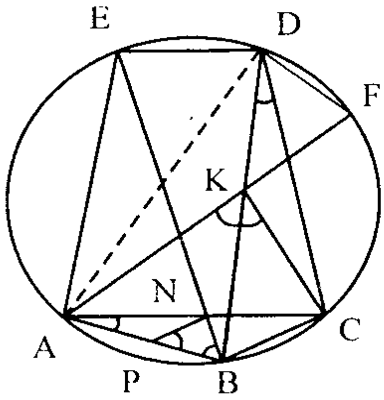
83. Жавоб: 150^0.

Умумийликка зарар етказмасдан $AC < BC$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда, $\angle ACO$ ва $\angle AMO$ ўткир бурчаклар бўлгани учун ACO ва AOM учбурчаклар тенг. Демак, $AC = MA$ ва $\angle AOC = \angle AOM$, $\measuredangle CIM = 360^0 - 2\measuredangle AOC = 180^0 - \angle ABC$. $\angle ABC$ бурчак



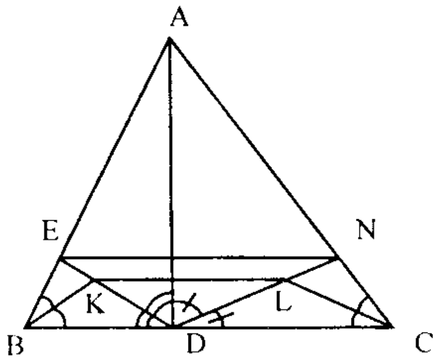
ўзининг энг катта қийматига BC томон A марказли ва MA радиусли айланага урининганда эришади ($AC = MA$). У ҳолда $\angle ABC = 90^0$, $\angle ABC = 30^0$ ва $\angle AOC = 150^0$.

84. AB кесманинг ўртаси P, BE ва AC кесмаларнинг кесишиш нуқтаси N, $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, $\angle ABE = \angle CBD = \beta$ ва $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$ бўлсин. ($AC \parallel DE$ бўлгани учун $AE = DC$, яъни $\angle ABE = \angle CBD$). У ҳолда ABN ва DBC учбурчаклар ўхшаш. NP ва CK мос равишда бу учбурчакларнинг медианалари бўлганлиги учун BPN ва BKC учбурчаклар ўхшаш. Айтайлик, $\angle AKB = \angle BKC = \varphi$ бўлсин. Юқоридаги фикрларга кўра $\angle BPN = \varphi$. Айлана билан AK тўғри чизиқнинг



кесишиш нуқтаси F десак, $CK = FK$ ва $\Delta\ BKC = \Delta\ DKF$, яъни $DF = BC$ ва $\angle KAD = \angle BDC = \alpha$ бўлади. AKD учбурчакдан $\varphi = \alpha + \gamma$, APN учбурчакдан $\angle ANP = \varphi - \alpha = \gamma = \angle ACB$. Шундай қилиб, $NP \parallel BC$, яъни N нуқта AC кесманинг ўртаси.

85. Шартга кўра AK ва AL тўғри чизиқлар мос равишда BAD ва DAC бурчакларнинг биссектрисалари бўлади. Учбурчак биссектрисалари хоссасидан $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{EK}{KD}$ ва $\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{NL}{LD}$. Бу тенгликлардан $\dfrac{AE}{AN} = \dfrac{EK \cdot LD}{NL \cdot KD}$ тенгликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб $AN = AE$ тенглик фақат ва фақат $\dfrac{EK}{KD} = \dfrac{NL}{LD}$, яъни DKL ва EDN учбурчаклар ўхшаш бўлганда бажарилади, бу эса $EN \parallel KD$ муносабатга тенг кучли.



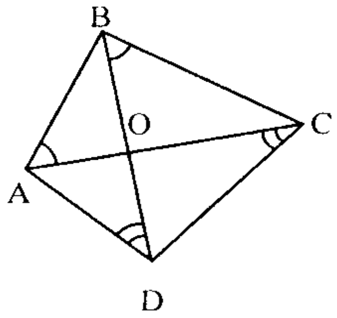
86.

a) $BE \parallel CD$ ва $DF \parallel BC$ бўлгани учун $\dfrac{PE}{PD} = \dfrac{BE}{CD}$ ва $\dfrac{QF}{QB} = \dfrac{FD}{BC}$.

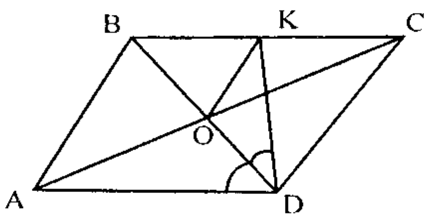
Бу тенгликдан, масала шартига кўра $\dfrac{PE}{PD} + \dfrac{QF}{QB} = \dfrac{BE}{CD} + \dfrac{FD}{BC} = \dfrac{BE + FD}{BC} = 1$.

b) $DF \parallel BC$ бўлгани учун $\dfrac{FQ}{QB} = \dfrac{FD}{BC} = \dfrac{EA}{AD}$. Фалес теоремасига кўра $EF \parallel AQ$. $BE \parallel CD$ бўлгани учун $\frac{PE}{PD} = \frac{BE}{CD} = \frac{AF}{AD}$. Бундан, $EF \parallel AP$. Шундай қилиб $AQ \parallel EF \parallel AP$, яъни P, A ва Q нуқталар бир тўғри чизиқда ётади.

87. Тўртбурчакнинг диагоналлари кесишиш нуқтаси O бўлсин. ABC ва BOC учбурчакларда C бурчак умумий, ва $\angle BAC = \angle CBO$. Демак, $\angle ABC = \angle BOC$. Шунингдек, $\angle ADC = \angle AOD$. У ҳолда $\angle BOC = \angle AOD$ бўлгани учун $\angle ABC = \angle ADC$.



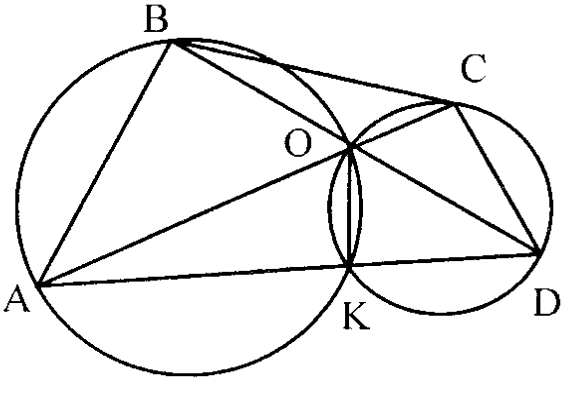
88. Жавоб: 2:1.
O - параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси $\angle KBD = \angle BDA = \angle BDK$ бўлгани учун $OK - BD$ кесманинг ўрта перпендикуляри. OCD учбурчак тенг ёнли бўлгани учун, C нуқта OD кесманинг ўрта перпендикулярида ётади. Бу ўрта перпендикуляр CH бўлсин. Фалес теоремасига кўра $BK : KC = BO : OH = 2 : 1$.



89. AOB ва COD учбурчакларга ташқи чизилган айланалар иккинчи марта K нуқтада кесишсин.
$\angle ABO + \angle AKO = 180^0$ ва $\angle DKO + \angle AKO = 180^0$ тенгликлардан $\angle ABO = \angle DKO$. Айланага ички чизилган бурчаклардан

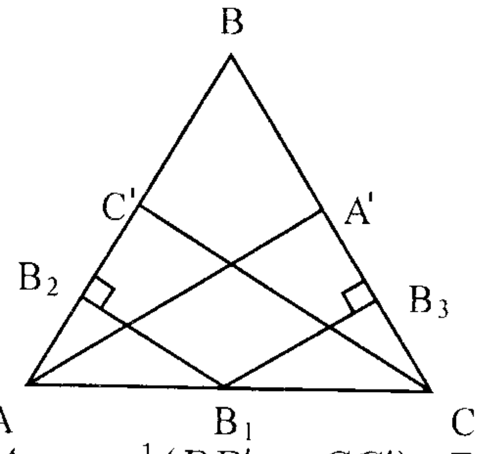
$$\angle OKD = \frac{\overset{\smile}{OCD}}{2} = \frac{\overset{\smile}{OC}}{2} + \frac{\overset{\smile}{CD}}{2}$$

ва $\angle COD = \frac{\overset{\smile}{CD}}{2}$. Шунинг учун $\angle ABO = \angle DKO > \angle COD = \angle AOB$. Учбурчакнинг катта бурчаги қаршисидаги катта томони ётгани учун $AO > AB$.



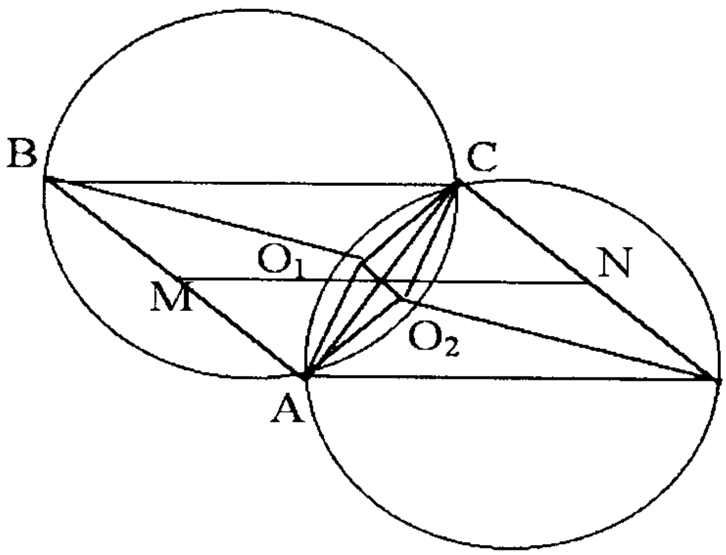
90. ABC учбурчакнинг BC, CA, AB томонларининг ўрталари мос равишда A_1, B_1, C_1 нуқталар, B_2

B_3 нуқталар эса B_1 нуқтани BA ва BC томонлардаги проекциялари бўлсин. У ҳолда B_1B_2 кесма ACC' учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади, бу ерда AA', BB', CC' кесмалар ABC учбурчакнинг баландликлари. $B_1B_2 = \frac{1}{2}CC'$, шунингдек $B_1B_3 = \frac{1}{2}AA'$. Масаланинг шартига кўра $BB_1 = \frac{1}{2}(AA' + CC')$.



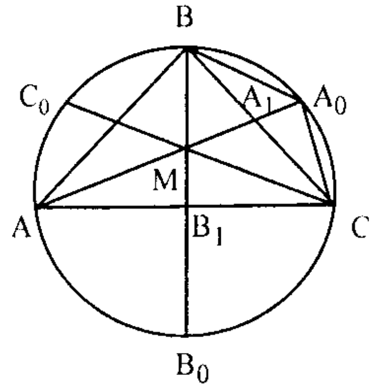
Шунингдек,$CC_1 = \frac{1}{2}(AA' + BB')$ ва $AA_1 = \frac{1}{2}(BB' + CC')$. Бу тенгликлардан $AA_1 + BB_1 + CC_1 = AA' + BB' + CC'$. Лекин, AA_1 - медиана, BB_1 - баландлик, яъни $AA_1 \geq AA'$. Бу ерда тенглик фақат $A_1 = A'$ бўлганда бажарилади. Демак, тенглик бажарилиши учун ABC учбурчакнинг медианалари ва баландликлари мос равишда устма-уст тушиши, яъни учбурчак тенг томонли бўлиши зарур.

91. Трапециянинг ўрта чизиғи трапеция диоганалини тенг иккига бўлади. Демак, MN тўғри чизиқ AC диагоналининг ўртаси бўлган O нуқтадан ўтади. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази томонларга ўтказилган ўрта перпендикулярнинг кесишиш нуқтасида ётгани учун $O_1O \perp AC$, $O_2O \perp AC$, бу ерда O_1 ва O_2 нуқталар ABC ва ACD учбурчакларга ташқи чизилган айланаларнинг марказлари. Шундай қилиб O_1O_2, AC ва MN кесмалар O нуқтада кесишади. Масала шартига кўра $OO_1 = OO_2$ ва $O_1O_2 \perp AC$, яъни AO_1CO_2 тўртбурчак - ромб. У ҳолда $\angle O_1BC = \angle BCO_1 = \angle O_2AD = \angle ADO_2$ ва $O_1C = O_2A$, яъни BO_1C ва AO_2D учбурчаклар тенг. Бундан $BC = AD$. Шундай қилиб, $BC \parallel AD$ бўлгани учун $ABCD$ тўртбурчак - параллелограмм.



92. Медианалар кесишиш нуқтасининг хоссасига кўра $2OA_1 = AO$.

Бундан $2OA_1 = OA_0$ ёки $OA_1 = A_1A_0$. Демак, $BOCA_0$ тўртбурчак - параллелограмм ва $\angle A_0CO = \angle A_0BO$. Ички чизилган бурчаклар хоссасига кўра $\overset{\smile}{A_0BC_0} = 2\angle A_0CC_0 = 2\angle A_0BO = \overset{\smile}{A_0CB_0}$. Бундан, тенг ёйларни тортиб турган A_0C_0 ва A_0B_0 векторлар тенг.



93. Томони n га тенг бўлган олтибурчакнинг юзи $S = 6 \cdot \frac{1}{2}n \cdot \frac{n\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}n^2$ га ва берилган фигуранинг юзи $S_1 = 4\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ га тенг. $\frac{S}{S_1} = \frac{3}{2}n^2$ - бутун бўлиши учун n жуфт бўлиши керак. Демак n - тоқ сон бўлса, бундай бўлакларга бўлиб бўлмайди. Томони жуфт бўлган ихтиёрий мунтазам кўпбурчакни берилган фигурадек бўлакларга ажратиш мумкин.

94.

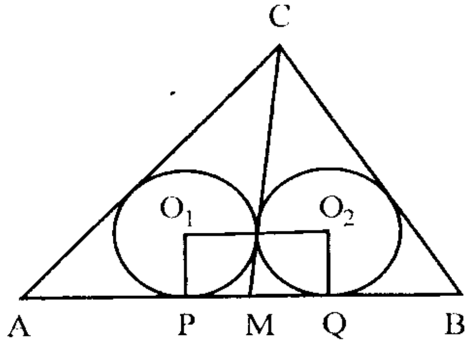
а) EPA ва DCA учбурчаклар, ҳамда FQB ва CDB учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{EP}{DC} = \frac{AE}{AD}$ ва $\frac{QF}{DC} = \frac{BF}{BC}$. Фалес теоремасига кўра $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$. Бу тенгликлардан $\frac{EP}{DC} = \frac{QF}{DC}$ ёки $EP = QF$ тенгликни ҳосил қиламиз.

б) Шартга кўра $\angle AOQ = \angle AEQ = 90^0$, яъни $AEOQ$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин. Бундан $\angle AQE = \angle EOA = 45^0$, яъни EAQ - тенг ёнли учбурчак ($AE = EQ$) эканлигини топамиз. Шунингдек, $DEPO$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигидан $DE = EP$ тенглик ҳосил қиламиз. У ҳолда, $EF = EP + PF = ED + EA = AD$.

95. Жавоб: $\frac{5}{4}$ ёки $\frac{5}{3}$.

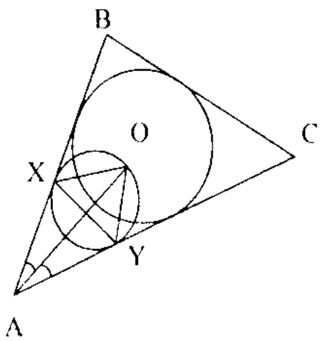
Айтайлик, $AB = c, BC = a, CA = b, 2p = a + b + c$ ва r - ички чизилган айланалар радиуслари бўлсин.

a) $S_{ABC} = r\left(\frac{a+b+c}{2}+CN\right)$ ва $S_{PQO_2O_1} = r(NQ + NP) = r\left(\frac{NB+CN-a}{2}+ + \frac{NA+CN-b}{2}\right) = r\left(CN+\frac{c}{2}-\frac{a+b}{2}\right)$ тенгликлардан ва масала шартидаги тенгликлардан фойдаланиб, исботланиши талаб қилинган тенгликка тенг кучли бўлган $\frac{a+b+c}{2} + CN = 6\left(CN+\frac{c}{2}-\frac{a+b}{2}\right)$ тенгликни ҳосил қиламиз.



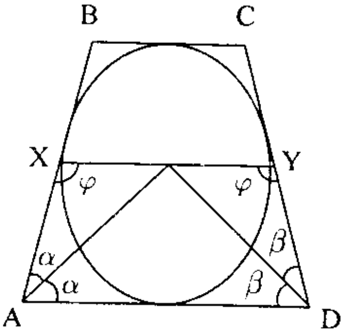
б) Аввал $CN = \sqrt{p(p-c)}$ тенгликни тўғрилигини исботлаймиз. Агар $\angle ANC = \varphi$ бўлса, у ҳолда $PN + QN = r\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\tan\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2r}{\sin\varphi}$ тенглик ўринли бўлади ва бундан $2r = PQ\sin\varphi = \left(CN+\frac{c}{2}-\frac{a+b}{2}\right)\sin\varphi = (CN - (p-c))\sin\varphi$ ни ҳосил қиламиз. Шунингдек, $S_{ABC} = r(p+CN) = \frac{CN-(p-c))\sin\varphi}{2}(p+CN)$ ва $S_{ABC} = \frac{c\cdot CN\cdot\sin\varphi}{2}$ тенгликлардан $c\cdot CN = (CN-(p-c))(p+CN)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу эса $CN = \sqrt{p(p-c)}$ га тенг кучли. Шунинг учун $10\cdot CN + 5c = 7(a+b)$ ва $4CN^2 = (a+b+c)(a+b-c)$ бўлади. $\frac{CN}{c} = S$ ва $\frac{a+b}{c} = q$ белгилаш киритиб, $10S+5 = 7q$ ва $4S^2 = q^2-1$ ларни ҳосил қиламиз. Бу системанинг ечимлари $S = \frac{3}{8}$, $q = \frac{5}{4}$ ва $S = \frac{2}{3}$, $q = \frac{5}{3}$. Демак, $\frac{AC+BC}{AB} = \frac{5}{4}$ ёки $\frac{5}{3}$ га тенг.

96. O нуқта ABC учбурчак биссектрисаларида ётади. $\angle XAO = \angle OAY$ ва $AX = AY$ бўлгани учун AOX ва AOY учбурчаклар ўхшаш. Бундан, $OX = OY$, яъни XOY - тенг ёнли учбурчак. Шундай қилиб, $\angle OXY = \angle OYX$. Бундан ташқари $\angle BXO = \angle XYO$, $\angle CYO = \angle OXY$ (бир хил ёйга тиралган бурчаклар сифатида). Демак, O нукта $BCYX$



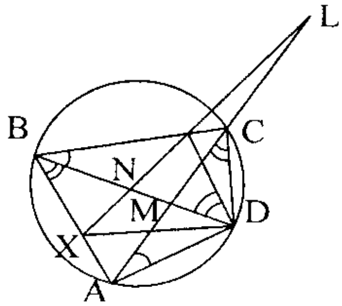
тўртбурчак биссектрисаларида ётади, яъни S айлана $BCYX$ тўртбурчакка ички чизилган. Изоҳ. Масала шартида айлана AB ва AC томонларга уринади деб аниқ айтилган. Агар бу жумлани "S айлана AB ва AC тўғри чизиқларга уринади" деб ўзгартирилса, иккинчи ҳолат вужудга келади. Бу ҳолда ҳам масаланинг тасдиғи тўғри. Исботланг.

97. $ABCD$ тўртбурчакка ички чизилган айлана маркази O нуқта бўлиб, $\angle XAO = \angle OAD = \alpha$, $\angle YDO = \angle ODA = \beta$ ва $\angle AXY = \angle AYX = \varphi$ бўлсин. У ҳолда, $2\alpha+2\beta+2\varphi = 360^0$ тенгликка кўра $\alpha + \beta + \varphi = 180^0$. Охирги тенгликдан $\angle YOD = \alpha$, $\angle XOD = \beta$ тенгликларни топамиз. Шундай қилиб, AOX ва DOY ўхшаш учбурчаклар. Демак,



$\frac{AX}{OY} = \frac{OX}{AY}$, яъни $AX \cdot DY = OX \cdot OY$ Шунингдек, $BX \cdot CY = OX \cdot OY$ ҳосил қилинади. У ҳолда, $AX \cdot DY = BX \cdot CY$ тенглик ўринли.

98. Умумийликка зарар етказмасдан L нуқта AC диагоналда C нуқтадан кейин жойлашган деб оламиз. Битта ёйга тиралган бурчаклар тенглигидан $\angle DAC = \angle DBC$ ва $\angle DCA = \angle DBA$. Шартга кўра $AB \parallel DY$. Демак, $\angle DCA = \angle DBA = \angle BDY$. Шундай қилиб, DAC ва YBD учбурчаклар иккита бурчаги бўйича ўхшаш. У ҳолда, бу учбурчакларни мос медианалари бўйлаб кесишиши натижасида



ҳосил бўлган DMC ва YND учбурчаклар ҳам ўхшаш бўлади. Бундан, $\angle DML = \angle DNL$. Охирги тенглик M, N, L ва D нуқталарни битта айланада ётишини билдиради.

99. Аввал қуйидагилеммани исботлаймиз.

Лемма. Маркази O нуқтада бўлган S айлана ва ундан ташқарида A нуқта берилган. A нуқтадан S айланага ўтказилган уринмаларнинг уриниш нуқталарини K ва L билан белгилаймиз. Агар KL ва AO кесмаларни кесишиш нуқтаси - B, C - айланадаги исталган нуқта ($C \notin OA$) бўлса, у ҳолда $\angle OCA = \angle OBC$ бўлади.

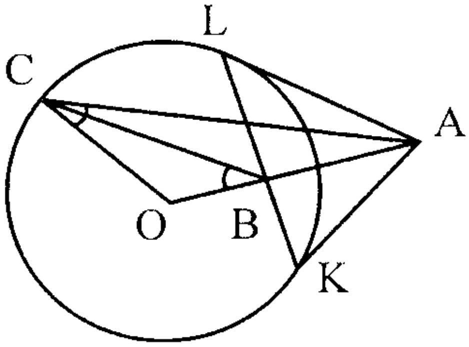
Исботи. Тўғри бурчакли OLB, OLA ва ABL учбурчакларўхшаш.

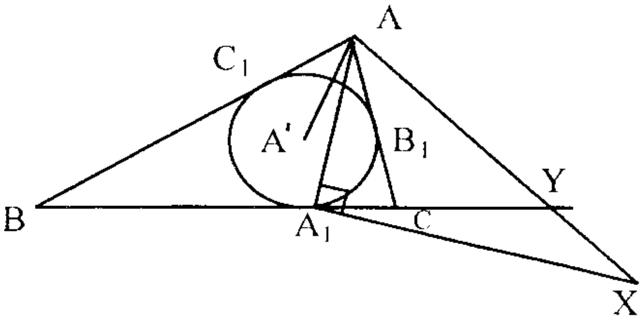
Шунинг учун

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OL}{OB} = \frac{OA}{OL} = \frac{OA}{OC}.$$

Демак, BOC ва COA - ўхшаш учбурчаклар ва $\angle OBC = \angle OCA$. Лемма исботланди.

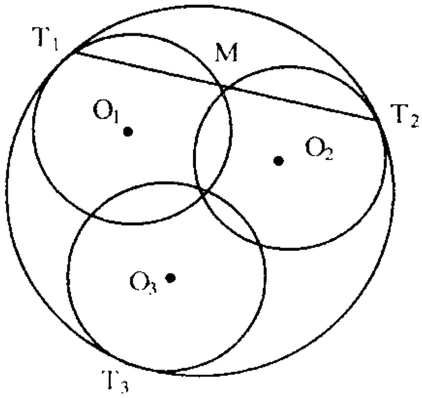
Энди масаланинг ечимига ўтамиз.





A бурчак биссектрисаси C_1X билан A' нуқтада кесишсин ва O нуқта ABC учбурчакка ички чизилган айлана маркази бўлсин. AA_1X учбурчак тўғри бурчакли бўлгани учун $A_1Y = AY$ ёки $\angle YAA_1 = \angle YA_1A$ тенгликларни кўрсатиш етарли (унда, A_1YX учбурчак тенг ёнли ва $A_1Y = YX = YA$ бўлади). $\angle AA'X = \angle AA_1X = 90^0$ бўлгани учун $AA'A_1X$ тўртбурчак айланага ички чизилган. Демак, $\angle XAA_1 = \angle XA'A_1$. Леммага кўра $\angle OA'A_1 = \angle OA_1A$. Бундан, $\angle YA_1A = \angle XA'A_1$ ва $\angle XAA_1 = \angle YA_1A$.

100. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ва ω айланаларнинг марказларини мос равишда O_1, O_2, O_3, O билан белгилайлик. ω_1 ва ω айланаларнинг уринишидан O, O_1, T_1 нуқталар бир тўғри чизиқда ётади ва $OO_1 = OT_1 - O_1T_1 = R - r$. Шунингдек, $OO_2 = OO_3 = R - r$. Шунинг учун O нуқта $O_1O_2O_3$ учбурчагига ташқи чизилган айлана маркази бўлади. $SO_1 = SO_2 = SO_3 = r$ бўлганидан эса, S нуқта ҳам $O_1O_2O_3$ учбурчагига ташқи чизилган айлананинг марказидир. Бу ердан S ва O нуқталар устма - уст тушиши келиб чиқади. M нуқта T_1T_2 кесманинг ўртаси бўлсин. У ҳолда OM - тенг ёнли OT_1T_2 учбурчакка ҳам медиана, ҳам баландлик, яъни M нуқта диаметри OT_1 бўлган айланада ётади. Демак, M нуқта ω_1 да ётади. Шунингдек, M нуқта ω_2 да ҳам ётади.



Шавкат Абдуллаевич Аюпов
Бадир Бердибоевич Рихсиев
Отамурод Шомуродович Қўчқоров

Математика олимпиадалари масалалари
II қисм

Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти Илмий кенгаши ва Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлигининг Таълим Маркази қошидаги математика йўналишидаги илмий-методик кенгаши томонидан тавсия этилган.

Муҳаррир: М.Содиқова

Нашриёт рақами з-916. Босишга рухсат этилди 25.11.04. Қоғоз бичими. Офсет босма. Офсет қоғоз. Ҳисоб-нашриёт т.3.0 Шартли босма т.2,52. 55 буюртма. 8,0 нусхада. Келишилган нархда.

ЎзР ФА "ФАН" нашриёти: 700047, Тошкент, акад. Я.Ғуломов кўчаси,70

“Yangiyul Poligraph Service” ОАЖ.
Янгийўл шаҳри, Самарқанд кўчаси, 44 уй. 2004 й.